Vorkurs Mathematik

Erstellt von Christine Bescherer und Rolf Springmann

vollständig überarbeitet von Jens Höchsmann

Stand: 2.11.2001

Inhaltsverzeichnis

I. Einführung in die 'Uni-Mathematik'

An der Hochschule verwendet man in der Mathematik Definitionen, Aussagen, Sätze und Beweise. Die folgenden Ausführungen sollen einen kurzen Einblick in diese Bezeichnungen und Ausdrücke geben.

1. Definitionen

Definitionen sind terminologische Vereinbarungen.
Aufgrund von Definitionen können sprachliche Missverständnisse und Mehrdeutigkeiten, wie sie in der Alltagssprache immer wieder auftreten (z.B. Schimmel: Pilz oder Pferd?), vermieden werden. Sie legen daher eindeutig fest, was unter einem bestimmten mathematischen Begriff zu verstehen ist.
Das folgende Beispiel gibt eine Definition des Begriffes „Primzahl“:

Definition: Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl, die durch genau zwei natürliche Zahlen ohne Rest teilbar ist.

Besondere Bedeutung erlangen Definitionen durch die Auslese und Zusammenfassung gewisser Eigenschaften. So sind nach obiger Definition die Zahlen 1, 4, 6, 8 keine Primzahlen, während die Zahlen 2, 3, 5, 7 den Primzahlen zuzurechnen sind.

2. Aussagen

2.1. Begriffsbestimmung

Mathematische Sätze bestehen aus Aussagen:

Definition: Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, das aufgrund seines Inhaltes entweder **wahr** oder **falsch** ist.

Beispiele für Aussagen:

Köln liegt am Rhein.	Hamburg liegt an der Donau.
Der Wal ist ein Fisch.	$2^{859433} - 1$ ist eine Primzahl.
$2 + 2 = 5$	Es ist nicht richtig, dass 69 eine Primzahl ist.

Jeder dieser Aussagen kann eindeutig einer der Wahrheitswerte „*wahr*“ oder „*falsch*“ zugeordnet werden (Auch wenn wir dies nicht genau wissen oder nicht ohne fachmännische Hilfe entscheiden können).

Keine Aussagen sind dagegen:

Komm her!	Die Zahl 5 ist größer.
Gelb ist roter als blau.	Regnet es?
$x + 3 = 8$	2 ist eine interessante Zahl.

2.2. Verknüpfungen von Aussagen

Stellt man einer Aussage das Wort *„nicht“* voran oder verbindet man zwei Aussagen durch *„und“* oder *„oder“*, so entstehen dadurch wieder neue Aussagen.

Negation

Die **Negation** (Verneinung) ordnet jeder Aussage A ihre verneinte Aussage, geschrieben $\overline{A}$ (oder auch $\neg A$), zu.

Beispiele zur Negation von Aussagen:

- A : Mainz liegt am Rhein.
  $\overline{A}$: Mainz liegt nicht am Rhein.

- B : Alle Primzahlen sind ungerade.
  $\overline{B}$: Es gibt mindestens eine Primzahl, die gerade ist.
  (nicht: Alle Primzahlen sind gerade.)

- C : Es gibt Vögel, die nicht fliegen können.
  $\overline{C}$: Alle Vögel können fliegen.

Ist eine Aussage wahr, so ist ihre Negation falsch.
Ist eine Aussage falsch, so ist ihre Negation wahr (s. obige Beispiele).

Bemerkung: Die Negation der Negation $\neg(\neg A)$ einer Ausssage A entspricht der Aussage A :

$$\neg(\neg A) = A$$

Und-Verknüpfung

Verbindet man zwei Aussagen A, B durch die Verknüpfung *„und“*, so entsteht eine neue Aussage *„A und B“*, geschrieben $A \wedge B$.
Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen A und B wahr sind. Andernfalls ist sie falsch. Die Aussage $A \wedge B$ wird also im Sinne von *„sowohl A als auch B“* verwendet.

Beispiele:

- Die Und-Verknüpfung der zwei wahren Aussagen A : *„3 ist kleiner als 7.“* und B : *„3 ist eine Primzahl“* ist die wahre Aussage $A \wedge B$: *„3 ist kleiner als 7 und eine Primzahl.“*

- Die Und-Verknüpfung von A : *„3 ist kleiner als 7.“* (wahr) und B : *„3 ist eine gerade Zahl.“* (falsch) ist die falsche Aussage $A \wedge B$: *„3 ist kleiner als 7 und eine gerade Zahl.“*

Oder-Verknüpfung

Verbindet man zwei Aussagen A, B durch die Verknüpfung *„oder“*, so erhält man eine neue Aussage *„A oder B“*, geschrieben $A \vee B$.
Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist.

Beispiele:

- Die Oder-Verknüpfung der zwei wahren Aussagen A : „*3 ist kleiner als 7.*“ und B : „*3 ist eine Primzahl.*“ ist die wahre Aussage $A \vee B$: „*3 ist kleiner als 7 oder eine Primzahl.*“

- Die Oder-Verknüpfung der wahren Aussage A : „*3 ist kleiner als 7.*“ mit der falschen Aussage B : „*3 ist keine Primzahl*“ ergibt die wahre Aussage $A \vee B$: „*3 ist kleiner als 7 oder keine Primzahl.*“

Beachte: $A \vee B$ meint **nicht** das umgangssprachliche *ausschließende Oder* im Sinne von *„entweder A oder B“* - wie es z. B. in dem Satz „*Morgen gehe ich ins Kino oder in die Kneipe.*“ vorkommt. Stattdessen ist $A \vee B$ eine wahre Aussage, wenn entweder A oder B oder aber auch beide Aussagen wahr sind. „*Oder*“ wird also wie im umgangssprachlichen Beispiel *„Möchten Sie Zucker oder Milch in Ihren Kaffee?“* verwendet.

3. Sätze und Beweise

3.1. Sätze

Mathematische Sätze treffen Aussagen über mathematische Sachverhalte.
Sie enthalten stets **Voraussetzungen** und **Behauptungen**. Die Voraussetzungen nennen dabei die Bedingungen unter denen die Behauptung(en) gelten.

Beispiele:

- **Satz:** Jede von 2 verschiedene Primzahl $p \neq 2$ ist ungerade.

- **Satz:** Wenn die natürliche Zahl a die natürlichen Zahlen b und c teilt, dann teilt a auch die Differenz $b - c$ der beiden Zahlen.

- **Satz:** Die lineare Gleichung $ax + b = 0$ besitzt für $a \neq 0$ genau eine Lösung $x = -\frac{b}{a}$; für $a = 0$ und $b \neq 0$ keine Lösung und für $a = b = 0$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Lösung.

  In diesen Sätzen werden Aussagen über „alle von 2 verschiedenen Primzahlen“, „alle natürlichen Zahlen, die zwei andere natürliche Zahlen teilen“ bzw. über „alle linearen Gleichungen“ (Voraussetzungen) gemacht. Andererseits kommen hier auch Aussagen wie „ist ungerade Zahl“, „teilt die Differenz“ bzw. „besitzt genau eine Lösung“ (Behauptungen) vor.

Verbunden sind Voraussetzungen und Behauptungen (explizit oder implizit) meist durch eine **Wenn-dann-Aussage (Implikation)**:
Wenn die Voraussetzung A vorliegt, *dann* gilt die Behauptung B (Schreibweise: $A \Rightarrow B$).

Beachte: Eine Implikation $A \Rightarrow B$ darf **nicht** einfach umgekehrt werden, da die Umkehrung $B \Rightarrow A$ möglicherweise nicht richtig ist.
Nicht gültig ist beispielsweise die Umkehrung des ersten in diesem Abschnitt genannten Beispiels: *Jede ungerade Zahl ist eine von 2 verschiedene Primzahl.*

Bemerkung: Es gibt auch Sätze der Form „*Genau dann-wenn*“. Damit ist die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ gemeint, d. h. es gilt sowohl die Implikation $A \Rightarrow B$ als auch die Implikation $B \Rightarrow A$.

Beispiel:

- **Satz:** In einem Dreieck gilt für seine Seitenlängen a, b, c *genau dann* die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, *wenn* das Dreieck rechtwinklig ist.

3.2. Beweise

Die Aufgabe des Beweises besteht darin, durch logisches Schließen die Gültigkeit der Implikation $A \Rightarrow B$ nachzuweisen.
Dies kann grundsätzlich auf unterschiedlichste Arten erreicht werden. Wir unterscheiden hier nur die zwei wichtigsten Beweismethoden, den **direkten** und den **indirekten Beweis.**

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis wird von der Voraussetzung A („direkt“) auf die Behauptung B geschlossen.
Bei folgendem Beispiel wird der Satz durch einen direkten Beweis verifiziert, da unmittelbar zu Beginn des Beweises von der Voraussetzung A : „*n ist eine ungerade Zahl*“ Gebrauch gemacht wird:

Beispiel für einen Satz mit direktem Beweis:

Satz: Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ergibt bei Division durch 8 den Rest 1.

Verdeutlichung der Aussage:

$$\begin{array}{rclcl} 1^2 & = & 1 & & \\ 3^2 & = & 9 & = & 8+1 \\ 5^2 & = & 25 & = & 24+1 \\ 7^2 & = & 49 & = & 48+1 \end{array}$$

Beweis: Eine ungerade Zahl n kann man in der Form $n = 2 \cdot m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ darstellen.

Somit gilt
$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4 \cdot m \cdot (m+1) + 1 \end{aligned}$$

Nun ist aber entweder m oder $m + 1$ gerade;
daher ist das Produkt $m \cdot (m + 1)$ durch 2 teilbar und somit das Produkt $4 \cdot m \cdot (m + 1)$ durch 8 teilbar. (qed)

Indirekter Beweis
(auch Widerspruchsbeweis genannt)

Beim indirekten Beweis geht man von der Negation $\neg B$ der zu beweisenden Behauptung B aus und leitet durch logisches Schließen einen Widerspruch zu der Voraussetzung A (oder einer anderen schon bekannten Tatsache C) ab.
Beim indirekten Beweis „tut man also so“, als ob das, was man zeigen will (B), falsch wäre.

Dann schlussfolgert man so lange, bis man eine Aussage erhält, die (zumindest bei Vorliegen der Voraussetzung A) nicht richtig ist.
Da man beim logischen Schließen keinen Fehler gemacht hat, muss der Fehler in der Annahme $\neg B$ stecken. Mit anderen Worten: Die Annahme, die Behauptung B sei falsch, ist falsch. Also muss die Behauptung B richtig sein (vgl. S. 4).

Das folgende **Beispiel** für einen Satz mit indirektem Beweis stammt von Euklid (300 v.Chr.):

Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:
Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es nur endlich viele Primzahlen, sagen wir n, aufgeschrieben $p_1(=2), p_2(=3), p_3, \ldots, p_n$. Die größte Primzahl wäre also p_n.
Wir betrachten nun die Zahl $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \ + \ 1$.
Diese Zahl kann keine Primzahl sein, denn sie ist ja größer als die größte Primzahl p_n.
Also muss sie von einer der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ geteilt werden, sagen wir von p_i.
Nun teilt aber p_i nicht nur N, sondern auch die um 1 kleinere Zahl $N-1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, denn p_i ist als Faktor in $N-1$ enthalten.
Wenn aber eine Zahl Teiler von zwei anderen Zahlen ist, dann ist sie auch Teiler von deren Differenz (Beispiel: 3 teilt 27 und 18; daher teilt 3 auch $27 - 18 = 9$).
Da die Differenz in unserem Fall 1 ist, müsste p_i Teiler der Zahl 1 sein.
Dies ist aber nicht möglich, da keine Primzahl - auch nicht p_i - die Zahl 1 teilt.
Wir haben damit einen Widerspruch gefunden. Folglich war unsere Annahme falsch, und es gibt tatsächlich unendlich viele Primzahlen. (qed)

Bemerkung: Beim indirekten Beweis wird statt der Implikation $A \Rightarrow B$ praktisch die **verneinte Umkehrung** $\neg B \Rightarrow \neg A$ (oder eine Variante davon) bewiesen.
Dies ist möglich weil Implikationen und ihre verneinten Umkehrungen äquivalent sind, d.h. *$A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist.*

4. Mengen

4.1. Mengenbegriff

Während wir uns bisher mit Begriffen der Logik und des mathematischen Schließens beschäftigt haben, wollen wir nun auf den Gegenstand mathematischer Untersuchungen eingehen. Es handelt sich dabei in aller Regel (um mehr oder weniger strukturierte) Mengen. Der Begriff der Menge spielt in der modernen Mathematik also eine fundamentale Rolle. Die ursprüngliche Definition geht auf G. Cantor zurück:

Definition: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren, bestimmten Objekten (**Elementen**) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Beispiele:
- die Menge der im Raum anwesenden Studenten
- die Menge aller Teiler der Zahl 12
- die Menge $P(M)$ der Teilmengen von $M = \{0, 1, 2, 3\}$

Das Wort „*wohlunterscheidbar*“ fordert, dass geklärt ist, was als gleich und was als verschieden anzusehen ist. In diesem Sinne sind $\frac{3}{2}$ und $1,5$ nicht wohlunterschieden, solange nicht geklärt ist, ob damit Zahlen oder Schreibfiguren (Schreibweisen) gemeint sind.

Das Wort „*bestimmt*“ meint, dass bei jedem Element eindeutig entscheidbar ist, ob es zu der betreffenden Menge gehört oder nicht. In diesem Sinne ist die Menge aller guten Fußballspieler einer Mannschaft keine Menge, solange nicht geklärt ist, welche Spieler als „gut“ zu gelten haben.

Schreibweise: Ist m ein Element der Menge M, so schreibt man: $m \in M$;
Ist m kein Element der Menge M, so schreibt man: $m \notin M$.

Definition: Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge**.
Für sie schreiben wir entweder $\{\ \}$ oder $\emptyset$.

<u>**Beachte:**</u> Die leere Menge $\{\ \}$ entspricht <u>nicht</u> der Menge $\{0\}$, die die Zahl 0 enthält.

4.2. Beschreibung von Mengen

Man kann Mengen in **aufzählender Form** oder in **beschreibender Form** angeben:

- <u>in aufzählender Form:</u>

die Menge der Teiler der Zahl 12	$M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$
die Menge der Buchstaben des Wortes *Mathe*	$M = \{M, a, t, h, e\}$
die Menge der geraden Zahlen	$M = \{\ 2;\ 4;\ 6;\ 8; \ldots\}$
die Menge $P(M)$ der Teilmengen von $M = \{0, 1\}$	$P(M) = \{\{\ \}; \{0\}; \{1\}; \{0; 1\}\}$

- <u>in beschreibender Form:</u>

die Menge der Teiler der Zahl 12 $\qquad M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ teilt } 12\}$

Dabei nennt man die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen **Grundmenge**.

4.3. Mengenrelationen

Definition: Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und jedes Element von B auch Element von A ist.

Beispiel: Ist $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Teiler von } 10\}$ und $B = \{1, 2, 5, 10\}$, so gilt $A = B$.

Definition: Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, geschrieben $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
(Ist die Menge A eine Teilmenge der Menge B, aber $A \neq B$, so kann man auch $A \subset B$ schreiben).

Beispiele: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{2\} \subseteq \{2, 4, 6\}$, $\emptyset \subseteq A$

4.4. Mengenoperationen

Für Mengen A, B definiert man die Begriffe **Schnitt-** und **Vereinigungsmenge** sowie **Komplement-** und **Differenzmenge** folgendermaßen:

Definition:

- Die **Schnittmenge** $A \cap B$ von A und B besteht aus allen Elementen, die *sowohl in* A *als auch in* B liegen.

  Beispiel: Ist $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$ die Menge der Teiler von 6 und
  $B = \{1;\ 2;\ 5;\ 10\}$ die Menge der Teiler von 10, so gilt
  $A \cap B = \{1;\ 2\}$

- Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ von A und B besteht aus allen Elementen, die *in* A *oder in* B enthalten sind.

  Im obigen Beispiel: $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10\}$

- Die **Komplementmenge** $\overline{A}$ einer (Teil)Menge A bezüglich einer Grundmenge G ist die Menge aller Elemente der Grundmenge G, die *nicht zu* A gehören.

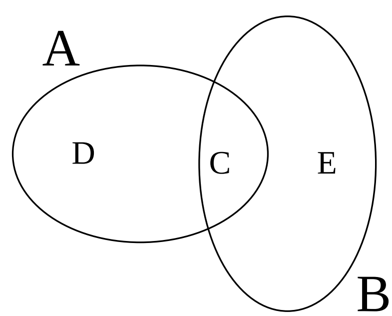
  Beispiel: Ist $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$ die Menge der Teiler von 6 bzgl. der Grundmenge
  $G = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, so lautet die Komplementmenge $\overline{A} = \{4;\ 5\}$.

- Die **Differenzmenge** $A \backslash B$ besteht aus denjenigen Elementen, die *zur Menge* A *aber nicht zur Menge* B gehören.

  Im obigen Beispiel: $A \backslash B = \{3;\ 6\}$ bzw. $B \backslash A = \{5;\ 10\}$

  Man kann damit auch die Komplementmenge schreiben als: $\overline{A} = G \backslash A$

Diese Mengen kann man anhand von sogenannten **Venn-Diagrammen** veranschaulichen:



Dabei ist hier: $C = A \cap B$, $D = A \backslash B$, $E = B \backslash A$, $A \cup B = C \cup D \cup E$.

4.5. Intervalle

Intervalle sind besondere Teilmengen der reellen Zahlen.
Ein Intervall besteht aus allen reellen Zahlen, die zwischen den im Intervall angegebenen Grenzen liegen. Je nach Art der Klammern gehören die Grenzen dazu oder nicht. Es gibt für $a < b$ folgende Intervalle:

abgeschlossen	$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	z. B.	$[3;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$
offen	$(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	z. B.	$(2;7) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$
links halboffen	$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	z. B.	$(3;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$
rechts halboffen	$[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	z. B.	$[1;\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$

Bemerkung: In manchen Lehrbüchern werden statt runden Klammern auch „*offene Klammern*" verwendet. Man schreibt dann

$]a;b[$	statt	$(a;b)$,
$]a;b]$	statt	$(a;b]$,
$[a;b[$	statt	$[a;b)$,

II. Der Aufbau des Zahlensystems

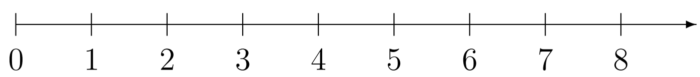
1. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die natürlichen Zahlen dienen zur Angabe einer Anzahl und zur Nummerierung, allgemein also zum Zählen. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Bei Hinzunahme der Null schreibt man $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Die natürlichen Zahlen lassen sich auf einem Zahlenstrahl anordnen:



Eigenschaften:

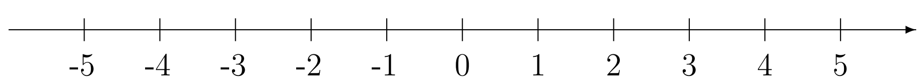
1. Die Menge $\mathbb{N}$ enthält unendlich viele Elemente.
2. Addiert oder multipliziert man zwei natürliche Zahlen, so ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Man sagt: $\mathbb{N}$ ist bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen.

2. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die ganzen Zahlen werden eingeführt, damit jede Gleichung der Form $a + x = b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ lösbar ist. So ist z. B. $x = -10$ Lösung der Gleichung $15 + x = 5$.
Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Der Zahlenstrahl wird durch Hinzunahme der negativen Zahlen zur Zahlengeraden erweitert:



Eigenschaften

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
2. Addiert, multipliziert oder subtrahiert man zwei ganze Zahlen, so erhält man wieder eine ganze Zahl. Man sagt: $\mathbb{Z}$ ist bezüglich dieser Rechenarten abgeschlossen.

Rechenregeln

Bei der Multiplikation ganzer Zahlen gelten u. a. folgende Rechengesetze:

Vorzeichenregeln:	$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$,	$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
Distributivgesetze:	$a(b + c) = ab + ac$,	$(a + b)c = ac + bc$

3. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die rationalen Zahlen werden eingeführt, damit jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ lösbar wird. So ist z. B. $x = \frac{4}{5}$ Lösung der Gleichung $5 \cdot x = 4$.

Für die Menge der rationalen Zahlen schreiben wir:

$$\mathbb{Q} \;=\; \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}\;,\; q \neq 0 \right\}$$

<u>Eigenschaften:</u>

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
   Insbesondere ist jede ganze Zahl (und damit auch jede natürliche Zahl) als Bruch darstellbar (z.B. $\quad 3 = \frac{3}{1} = \frac{15}{5} \quad ; \quad -1 = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1}$).

2. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist bezüglich der Grundrechenarten abgeschlossen. Dabei ist aber die Division durch 0 nicht erlaubt!

3. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

4. Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher oder unendlicher periodischer Dezimalbruch darstellen.

   Beispielsweise gilt $\quad \frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = 0,625 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\bar{3} \quad ; \quad \frac{13}{90} = 0,1\bar{4}$.

<u>Darstellung:</u>

Ein und dieselbe Bruchzahl kann durch **Erweitern** und **Kürzen** unterschiedlich aufgeschrieben werden.

Erweitern: $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot k}{b \cdot k} \qquad (a \in \mathbb{Z};\ b, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Kürzen: $\qquad \dfrac{a \cdot k}{b \cdot k} = \dfrac{a}{b} \qquad (a \in \mathbb{Z};\ b, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

(<u>**Beachte:**</u> Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!)

Die **Gleichheit** zweier Brüche lässt sich mit folgender Beziehung überprüfen:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1 \qquad ;\ a_1, a_2 \in \mathbb{Z};\ b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

<u>Rechenregeln</u>

Für beliebige Brüche $\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}$ mit $a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}$ und $b_1,\ b_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$
\begin{array}{|llll|}
\hline
(1) & \dfrac{a_1}{b_1} \pm \dfrac{a_2}{b_1} & = & \dfrac{a_1 \pm a_2}{b_1} \\
(2) & \dfrac{a_1}{b_1} \pm \dfrac{a_2}{b_2} & = & \dfrac{a_1 \cdot b_2 \pm a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} \\
 & \multicolumn{3}{l|}{\text{Dabei heißt } b_1 \cdot b_2 \textbf{ gemeinsamer Nenner von } b_1 \text{ und } b_2.} \\
(3) & \dfrac{a_1}{b_1} \cdot \dfrac{a_2}{b_2} & = & \dfrac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} \\
(4) & \dfrac{a_1}{b_1} : \dfrac{a_2}{b_2} & = & \dfrac{a_1}{b_1} \cdot \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2} \\
\hline
\end{array}
$$

Beispiele:

a) $$1 - \frac{u}{1-\frac{u}{u+1}} = 1 - \frac{u}{\frac{u+1-u}{u+1}} = 1 - \frac{u}{\frac{1}{u+1}}$$
$$= 1 - \frac{u\cdot(u+1)}{1} = 1 - u^2 - u \qquad \text{für} \qquad u \neq -1$$

b) $$\frac{ab + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}}{a + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4ab+2b-2a-1}{4}}{\frac{2a+1}{2}} = \frac{4ab + 2b - 2a - 1}{4a + 2}$$
$$= \frac{2b(2a+1) - (2a+1)}{2 \cdot (2a+1)} = \frac{(2b-1)(2a+1)}{2 \cdot (2a+1)} = \frac{2b-1}{2} \quad \text{für} \quad a \neq -\frac{1}{2}$$

4. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

4.1. Definition und Eigenschaften von $\mathbb{R}$

Auf der Zahlengeraden kann jedem Punkt, der nicht mit einer rationalen Zahl belegt ist, eine unendliche, nicht-periodische Dezimalzahl zugeordnet werden (Beispiele: $\sqrt{7}, \pi$).
Durch Hinzunahme dieser **irrationalen Zahlen** zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erhält man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Eigenschaften:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. Die Menge $\mathbb{R}$ füllt die gesamte Zahlengerade aus.
   Insbesondere kann die Menge der reellen Zahlen nicht in aufzählender Form geschrieben werden.
3. Jede irrationale Zahl lässt sich als unendlicher nicht-periodischer Dezimalbruch darstellen.
4. Jede irrationale Zahl lässt sich durch rationale Zahlen beliebig genau approximieren (annähern).
   Beispiel:
   $$\begin{array}{rcccl} 3 & < & \pi & < & 4 \\ 3,1 & < & \pi & < & 3,2 \\ 3,14 & < & \pi & < & 3,15 \\ 3,141 & < & \pi & < & 3,142 \end{array}$$
   $$\Rightarrow \quad \pi \quad = \quad 3,1415926\ldots$$

4.2. Quadratwurzeln

Definition: Unter der **(Quadrat)Wurzel** $\sqrt{a}$ einer positiven reellen Zahl $a \geq 0$ versteht man die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Rechenregeln:

Für $a, b \geq 0$ gelten folgende Rechengesetze:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \\ (2) & \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \end{array}}$$

Beachte: Für die Wurzel einer Summe oder Differenz gibt es **kein** Rechengesetz. Insbesondere ist zu beachten: $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

Beispiel: $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq 5 = \sqrt{4} + \sqrt{9}$.

4.3. Rationalmachen des Nenners

Wurzeln können auch im Nenner eines Bruches auftreten (z.B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{7}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$).

Unter **„Rationalmachen des Nenners“** versteht man das Erweitern des Bruches, so dass im Nenner kein Wurzelzeichen mehr auftaucht.

Beispiel: a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{35}}{10}$

Auch bei **Bruchtermen** (d.h. Brüchen, bei denen im Nenner eine Variable steht) lässt sich der Nenner rational machen. Dadurch kann sich allerdings die Definitionsmenge ändern:

Beispiel: $\dfrac{7}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$ $\qquad D = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$

$\dfrac{7\sqrt{a} - 7\sqrt{3}}{a-3}$ $\qquad D = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0 \ \wedge \ a \neq 3\}$

Beachte: Die Definitionsmenge des Bruchterms hat sich durch das Rationalmachen des Nenners verkleinert!

Bemerkung: Die Definitionsmenge D eines Bruchtermes gibt an, welche reellen Zahlen in die einzelnen Variablen eingesetzt werden dürfen.

Beispiele: a) $\dfrac{a}{b+5}$ $\qquad D = \{b \in \mathbb{R} \mid b \neq -5\}$

b) $\dfrac{4}{a+b}$ $\qquad D = \{a, b \in \mathbb{R} \mid a \neq -b\}$

5. Beträge

Definition: Der Betrag einer Zahl a ist definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag $|a|$ gibt den Abstand von a zum Nullpunkt an, $|a-b|$ den Abstand von a zu b.

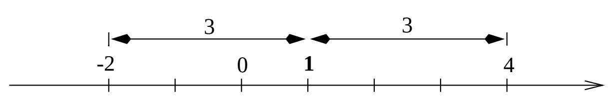
<u>Eigenschaften des Betrags</u>

1. $|-a| \ = \ |a|$
2. $|a \cdot b| \ = \ |a| \cdot |b|$
3. $|a+b| \ \leq \ |a| + |b| \qquad$ (*Dreiecksungleichung*)

Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq d\}$ besteht aus allen Zahlen, die von a höchstens die Entfernung d besitzen. Sie entspricht also dem abgeschlossenen Intervall $[a-d; a+d]$.

Beispiel: Es gilt $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$.

Dies kann man sich auch gut graphisch veranschaulichen:



III. Potenzen, Logarithmen und Binomialkoeffizienten

1. Potenzen

1.1. Potenzen mit ganzzahligem Exponenten

Definition: a) Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ schreibt man: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$.

a heißt **Basis**, n heißt **Exponent**.

b) Für $0 \neq a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ setzen wir $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Spezialfall: Wir vereinbaren $a^0 = 1$

<u>Merke:</u> $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$: $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n-1} = -1$.

<u>wichtige Basen:</u>

a) Basis 10: Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen) werden oft verwendet, um kleine oder große Zahlen kurz und übersichtlich zu schreiben.

Beispiele: $10^3 = 1000$; $4 \cdot 10^{-2} = 0,04$; $4,5 \cdot 10^{-5} = 0,000045$.

b) Basis e: Potenzen mit der Basis $e \approx 2,7182818\ldots$ (*Eulersche Zahl*) spielen bei in der Natur auftretenden Wachstumsprozessen und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine große Rolle.

<u>Rechenregeln:</u> Für beliebige reelle Basen $a \neq 0$, $b \neq 0$ und ganzzahlige Exponenten m, n gelten die folgenden **Potenzgesetze**:

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
(1) & a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\[1ex]
(2) & \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\[1ex]
(3) & a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\[1ex]
(4) & \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \\[1ex]
(5) & (a^n)^m = a^{n \cdot m}
\end{array}
}
$$

Für die Reihenfolge der Rechenoperationen gilt die folgende **„Vorfahrtsregel“**:

Hoch vor Punkt vor Strich

D. h. dass beispielsweise beim Term $2 \cdot 3^4$ zuerst 3^4 berechnet und dann mit 2 multipliziert wird: $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162 \neq 1296 = 6^4 = (2 \cdot 3)^4$

1.2. Potenzen mit rationalem Exponenten

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$.
Dann bezeichnet $x = \sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$.
Man sagt x ist die **n-te Wurzel** aus a.

Bemerkung: Für $n = 2$ erhält man die Quadratwurzel $x = \sqrt{a}$ (s. o.).

Man definiert nun Potenzen mit rationalem Exponenten und positiver Basis a wie folgt:

Definition: Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ schreibt man $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ und $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Für Potenzen mit rationalem Exponenten und positiver Basis gelten ebenfalls die Potenzgesetze und die Vorfahrtsregel.

2. Logarithmen

2.1. Definition und Rechenregeln

Definition: Für jedes $a > 0, a \neq 1$ und jedes $b > 0$ nennt man die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ den **Logarithmus von** b **zur Basis** a: $\quad x = \log_a b$.

Es gilt also: $\quad a^x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a b$
Insbesondere ist $a^{\log_a b} = b$ und $\log_a(a^b) = b$

Beispiele:
a) $10^x = 100 \quad ; \; x = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} 100 = 2$
b) $7^x = \frac{1}{49} \quad ; \; x = -2 \quad \Rightarrow \quad \log_7 \frac{1}{49} = -2$
c) $3^x = \sqrt{3} \quad ; \; x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

Spezialfälle: $\quad \log_a a = 1 \quad ; \quad \log_a 1 = 0.$

<u>**Merke:**</u> $\log_a 0$ ist nicht definiert, denn $a^x \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Im Fall $a = 1$ gibt es für die Gleichung $a^x = b$ entweder keine oder unendlich viele Lösungen:

a) $1^x = 5$ hat keine Lösung

b) $1^x = 1$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, besitzt also unendlich viele Lösungen

Deshalb kann der Logarithmus $\log_1 b$ zur Basis 1 **nicht** definiert werden.

<u>Wichtige Basen:</u>

a) **Basis 10:** Logarithmen zur Basis 10 heißen *dekadische, Briggs'sche oder Zehnerlogarithmen.*
Schreibweise: $\quad \log_{10} b = \log b = \lg b = x \quad \Longleftrightarrow \quad 10^x = b.$
b) **Basis e:** Logarithmen zur Basis $e = 2,71828\ldots$ heißen *natürliche Logarithmen.*
Schreibweise: $\quad \log_e b = \ln b = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = b.$

Rechenregeln:

Aus der Definition des Logarithmus und den Potenzgesetzen ergeben sich die folgenden **Rechenregeln für Logarithmen**:

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
(1) & \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \\
(2) & \log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v \\
(2') & \log_a \dfrac{1}{v} = -\log_a v \\
(3) & \log_a u^v = v \cdot \log_a u \\
(3') & \log_a \sqrt[n]{u} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a u
\end{array}
}
$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\lg\left(\frac{3b^3}{10}\right) &= \lg 3 + \lg b^3 - \lg 10 \\
&= \lg 3 + 3\lg b - 1
\end{aligned}
$$

Beachte: $\log_a(u+v) \neq \log_a u + \log_a v$

Beispiel: $\log_2(1+1) = \log_2 2 = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \log_2 1 + \log_2 1$

Übung: Beweis von Aussage (1): $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

Es ist $u = a^{\log_a u}$; $v = a^{\log_a v}$

$\Rightarrow \quad u \cdot v = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = a^{\log_a u + \log_a v}$

Logarithmiert man diese Gleichung mit $\log_a$, so erhält man

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \qquad \text{(qed)}$$

2.2. Logarithmen zu verschiedenen Basen

Da auf dem Taschenrechner in der Regel nur der Zehner- und der natürliche Logarithmus vorhanden sind, kann man z. B. $\log_3 5$ nicht direkt berechnen. Folgende Umformungen erlauben dennoch eine Bestimmung von $\log_3 5$:

$$
\begin{array}{llll}
x = \log_3 5 & \iff & 3^x = 5 & \\
& \iff & \lg 3^x = \lg 5 & \text{Logarithmierung mit dem 10er-Logarithmus} \\
& \iff & x \cdot \lg 3 = \lg 5 & \text{Anwendung von Rechenregel (3)} \\
& \iff & x = \dfrac{\lg 5}{\lg 3} & \text{Division durch} \lg 3
\end{array}
$$

Folglich ist $x = \log_3 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 3}$.

Dies gilt auch allgemein, d. h. man kann den Logarithmus zu einer Basis c durch Logarithmen mit einer anderen Basis a ausdrücken:

$$\boxed{\log_c x \;=\; \frac{\log_a x}{\log_a c}}$$

Beispiel: $\quad \log_3 5 \;=\; \dfrac{\log_7 5}{\log_7 3} \;=\; \dfrac{\lg 5}{\lg 3} \;=\; \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

3. Fakultäten und Binomialkoeffizienten

3.1. Fakultäten

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ heißt das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ **n-Fakultät**.
Schreibweise: $\quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \;=\; n!$

Spezialfall: Man definiert $\quad 0! \;=\; 1.$

Anwendung

Will man n Elemente (mit Beachtung der Reihenfolge) anordnen, so gibt es gerade $n!$ Möglichkeiten dies zu tun.

Beispiel: $n = 3$; Elemente: O X I

mögliche Anordnungen: O X I ; O I X ; X I O ;
X O I ; I O X ; I X O.

Ergebnis: $6 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ Möglichkeiten

3.2. Binomialkoeffizienten

Definition: Für $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$ heißt $\dbinom{n}{k} \;=\; \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (sprich: n über k)
Binomialkoeffizient.

Spezialfälle: $\dbinom{n}{0} \;=\; 1 \quad , \quad \dbinom{n}{n} \;=\; 1 \quad , \quad \dbinom{n}{1} \;=\; n.$

Beobachtung:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} \\ &= \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \;=\; \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}\end{aligned}$$

Anwendung 1:

$\dbinom{n}{k}$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen.

Beispiele: a) $n = 3,\ k = 2$; Elemente: O, X, I
mögliche Kombinationen: O X ; I X ; I O

Ergebnis: $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$ Möglichkeiten.

b) Anzahl der möglichen Ziehungen beim Lotto:
$n = 49\,,\ k = 6 : \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{6!} = 13.983.816$ Möglichkeiten.

<u>Anwendung 2:</u>
Binomialkoeffizienten treten auch als Koeffizienten in der allgemeinen binomischen Formel auf:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Im *Spezialfall* $n = 2$ erhält man die (erste) binomische Formel

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

<u>Binomialkoeffizienten aus dem Pascalschen Dreieck</u>

Es gilt: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad , \quad 0 \le k < n$

Mit dieser Formel lassen sich alle Binomialkoeffizienten rekursiv berechnen. Die Rekursion kann am Pascalschen Dreieck besonders gut veranschaulicht werden:

$n = 0$ $\qquad 1 = \binom{1}{0}$

$n = 1$ $\qquad 1 = \binom{1}{0} \qquad 1 = \binom{1}{1}$

$n = 2$ $\qquad 1 = \binom{2}{0} \qquad 2 = \binom{2}{1} \qquad 1 = \binom{2}{2}$

$n = 3$ $\qquad 1 = \binom{3}{0} \qquad 3 = \binom{3}{1} \qquad 3 = \binom{3}{2} \qquad 1 = \binom{3}{3}$

$\vdots$

Pascalsches Dreieck bis $n = 6$:

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

Vergleiche: $(a+b)^6 \;=\; a^6 \;+\; 6a^5b \;+\; 15a^4b^2 \;+\; 20a^3b^3 \;+\; 15a^2b^4 \;+\; 6ab^5 \;+\; b^6.$

IV. Gleichungen und Ungleichungen

1. Gleichungen

1.1. Definition und Eigenschaften von Gleichungen

Beispiel: Karl hebt von seinem Konto 150 DM ab und kauft anschließend eine Flasche Wein für 9 DM und zwei Kasten Bier. Danach hat er noch 97 DM im Geldbeutel. Welchen Preis hat Karl für einen Kasten Bier bezahlt, wenn er vor seinem Bankbesuch kein Geld mehr im Geldbeutel hatte?

Der Preis eines Kasten Biers sei x DM.

$$\begin{aligned} 150\text{ DM} - 9\text{ DM} - 2x\text{ DM} &= 97\text{ DM} && \\ 141\text{ DM} - 2x\text{ DM} &= 97\text{ DM} && \mid -141\text{ DM} \\ -2x\text{ DM} &= -44\text{ DM} && \mid :(-2) \\ x\text{ DM} &= \frac{-44}{-2}\text{ DM} = 22\text{ DM} && \end{aligned}$$

Er bezahlte für jeden Kasten Bier 22 DM.

Definition: **Gleichungen** liegen dann vor, wenn Rechenausdrücke (Terme) durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Eigenschaften der „="-Beziehung:

Symmetrie: $a = b \iff b = a$

Transitivität: Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.

1.2 Lösung von Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen

Will man eine Gleichung lösen, so formt man diese so lange um, bis die gesuchte Variable isoliert ist.
Damit man tatsächlich die Lösung der Gleichung erhält, von der man ausging, dürfen die verwendeten Umformungen die Lösungsmenge nicht ändern - die Umformungen müssen sogenannte **Äquivalenzumformungen** sein.

Für die „="-Beziehung gibt es die folgenden

Äquivalenzumformungen:

Addition: $a = b \iff a + c = b + c$ für $c \in \mathbb{R}$

Beispiel: $\frac{3}{2} = 1,5 \iff \frac{3}{2} + 3 = 1,5 + 3$

Multiplikation: $a = b \iff a \cdot c = b \cdot c$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beispiel: $\frac{3}{2} = 1,5 \iff \frac{3}{2} \cdot 3 = 1,5 \cdot 3$

Die folgenden Beispiele sollen zeigen, wie man einfache Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen löst:

Beispiele: a)

$$\begin{aligned} 6x-7 &= 3x+8 && \mid +7 \\ 6x &= 3x+15 && \mid -3x \\ 3x &= 15 && \mid :3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{5\}$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\cdot(6x-4)+8 &= 2x+\frac{20}{3} \\ 2x-\frac{4}{3}+8 &= 2x+\frac{20}{3} && \mid -2x-\frac{20}{3} \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} 6\cdot(2x-7)+3 &= 12x-48 \\ 12x-42+3 &= 12x-48 && \mid -12x+39 \\ 0x &= -9 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{\,\}$.

Allgemein gilt der folgende

Satz: Die lineare Gleichung $ax = b$ besitzt

- für $a \neq 0$ die Lösung $L = \{\frac{b}{a}\}$,
- für $a = 0$ und $b = 0$ unendlich viele Lösungen $L = \mathbb{R}$,
- für $a = 0$ und $b \neq 0$ keine (reelle) Lösung $L = \{\,\}$.

1.3. Quadratische Gleichungen

Rein quadratische Gleichungen

Satz: Die reinquadratische Gleichung $x^2 = a$ besitzt

- für $a > 0$ die 2 Lösungen $x_1 = +\sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$,
- für $a = 0$ die (eine) Lösung $x = 0$,
- für $a < 0$ keine (reelle) Lösung.

Mit Hilfe dieser Feststellung lässt sich die Lösungsmenge jeder Gleichung, in der die Variable x aussschließlich in der zweiten Potenz auftritt, bestimmen:

Beispiel:

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 16 && \mid \cdot\tfrac{1}{4} \\ x^2 &= 4 \\ \Longrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ L &= \{-2; 2\} \end{aligned}$$

Allgemeine quadratische Gleichungen

Zur Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) benutzt man die

Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel)

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung hängt von der Determinanten $D = b^2 - 4ac$ ab:

Für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen,
für $D = 0$ gibt es eine Lösung und
für $D < 0$ gibt es keine Lösung.

Beispiel: Gesucht ist die Lösung der Gleichung $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$.

Hier ist $a = -\frac{1}{2}, b = 3, c = -2$; also

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} \;=\; 3 \mp \sqrt{5},$$

$$L \;=\; \Big\{\underbrace{3 - \sqrt{5}}_{\approx 0{,}76};\quad \underbrace{3 + \sqrt{5}}_{\approx 5{,}25}\Big\}$$

Spezialfälle

a) Ist $c = 0$, so kann die spezielle quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx = 0$ für $a \neq 0$ durch Ausklammern von x einfacher gelöst werden.
Beispiel :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x &= 0 \\ x \cdot (2x + 3) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad x = 0 \quad &\text{oder} \quad 2x + 3 = 0 \\ L &= \{0; -\tfrac{3}{2}\} \end{aligned}$$

Beachte: Man darf zur Bestimmung der Lösungsmenge **nicht** durch x teilen, da durch diese Umformung die Lösung $x = 0$ verloren gehen kann.

b) Manchmal kann man zur Lösung von quadratischen Gleichungen auch die **Binomischen Formeln** verwenden. Sie lauten:

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)\,(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 25x^2 - 16 &= 0 \\ (5x+4)(5x-4) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad 5x+4=0 \quad &\text{oder} \quad 5x-4=0 \\ x = -\frac{4}{5} \quad &\text{oder} \quad x = \frac{4}{5} \qquad\qquad L = \left\{\pm\frac{4}{5}\right\} \end{aligned}$$

Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen können

Bruchgleichungen können beim Multiplizieren mit dem Hauptnenner auf quadratische Gleichungen führen:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x+1} &= \frac{4}{4x^2+2x} && D = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}; 0\} \qquad HN:\ 4x^2+2x \\ \frac{2x\cdot(x-1)}{4x^2+2x} &= \frac{4}{4x^2+2x} && |\cdot(4x^2+2x) \\ (*) \qquad 2x^2-2x &= 4 && |-4 \\ 2x^2-2x-4 &= 0 && |:2 \\ x^2-x-2 &= 0 \\ \Longrightarrow \qquad x_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} && x_1 = 2 \in D \ ; \ x_2 = -1 \in D \\ L &= \{-1; 2\} \end{aligned}$$

Beachte: Durch das Multiplizieren von Bruchgleichungen mit dem Hauptnenner können sich rechnerisch Lösungen ergeben, die nicht im Definitionsbereich liegen. Bei der Angabe der Lösungsmenge sind diese zu eliminieren.

Auch Wurzelgleichungen können beim Quadrieren auf lineare oder quadratische Gleichungen führen:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1} &= 0 && |-\sqrt{x^4+1} \qquad D = \mathbb{R} \\ \sqrt{x^2+1} &= -\sqrt{x^4+1} \\ (*) \qquad x^2+1 &= x^4+1 && |-x^2-1 \\ x^4-x^2 &= 0 \\ x^2\left(x^2-1\right) &= 0 \\ x^2 = 0 \quad &\text{oder} \quad x^2 = 1 \\ \Longrightarrow \qquad x_1 = 0\ ,\ x_2 &= -1\ ,\ x_3 = 1 \end{aligned}$$

Beachte: Für die Lösungsmenge gilt

$$L = \{\ \}$$

<u>Grund:</u> Quadrieren ist **keine** Äquivalenzumformung.
Quadriert man die in der 2. Zeile angegebene Gleichung, so ergibt sich in der 3. Zeile eine Gleichung, die mehr Lösungen besitzt als die vorangegangene Gleichung.
Auch das Wurzelziehen ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung.

Umformungen, die keine Äquivalenzumformungen sind, kennzeichnen wir mit dem Zeichen $(*)$. Sie machen das Durchführen der *Probe* (Überprüfung der Korrektheit der Lösung durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung) erforderlich.

1.4. Lösungen von Gleichungen des Typs $x^n = a$

Die Lösungsmenge einer reinen Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$; $1 < n \in \mathbb{N}$ ist abhängig von den Werten a und n.

Satz: Jede Gleichung der Form $x^n = a$ besitzt *höchstens* 2 reelle Lösungen. Genauer gilt:

I) n gerade:
- 1) $a > 0:$ 2 reelle Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$
- 2) $a = 0:$ eine reelle Lösung $x = 0$
- 3) $a < 0:$ keine reelle Lösung

II) n ungerade: Für jede reelle Zahl a gibt es *genau* eine Lösung
- 1) $a > 0:$ $x = \sqrt[n]{a}$
- 2) $a = 0:$ $x = 0$
- 3) $a < 0:$ $x = -\sqrt[n]{-a}$

Beispiele:

zu I, 1): $x^4 = 16 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

zu I, 3): $x^6 = -64$ besitzt keine Lösung, da bei geradem Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann.

zu II, 1): $x^3 = 27 \iff x = \sqrt[3]{27} = 3$

zu II, 3): $x^3 = -64 \iff x = -\sqrt[3]{64} = -4.$

Bemerkung: Der obige Satz klärt, warum wir die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ einer reellen Zahl a als „die“ positive Lösung der Gleichung $x^n = a$ definieren konnten. Diese Definition liefert (unter den genannten Voraussetzungen) einen eindeutig bestimmten Wert.

1.5. Lösen von Exponentialgleichungen

Die Lösung einer Exponentialgleichung $a^x = b$ (mit $a, b > 0$, $a \neq 1$) erhält man durch Logarithmieren:

$$
\begin{aligned}
& & a^x &= b & & \\
&\Longleftrightarrow & \lg a^x &= \lg b & & \text{Logarithmierung mit dem 10er-Logarithmus} \\
&\Longleftrightarrow & x \cdot \lg a &= \lg b & & \text{Anwendung der Logarithmusregel (3)} \\
&\Longleftrightarrow & x &= \frac{\lg b}{\lg a} & & \text{Division durch } \lg a
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Das Vorgehen beim Lösen einer Exponentialgleichung entspricht dem Vorgehen zur Bestimmung der Darstellung eines Logarithmus mit Hilfe von Logarithmen zu einer anderen Basis (vgl. III 2.2):

$$a^x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Beispiele: a)

$$
\begin{aligned}
15^x &= \frac{1}{225} \\
\lg 15^x &= \lg \frac{1}{225} \\
x \cdot \lg 15 &= \lg \frac{1}{225} \\
x &= \frac{\lg \frac{1}{225}}{\lg 15} = \frac{\lg 15^{-2}}{\lg 15} = \frac{-2 \cdot \lg 15}{\lg 15} = -2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 332 \\
\ln e^x &= \ln 332 \\
x \cdot \ln e &= \ln 332 \\
x &= \ln 332 \approx 5,8
\end{aligned}
$$

2. Ungleichungen

2.1. Definition und Eigenschaften von Ungleichungen

Beispiel: Petra kauft für eine Party ein: 2 Kisten Bier zu je 22 DM, eine Kiste Wein für 42 DM und für den Rest möchte sie Sekt, die Flasche zu 12 DM, kaufen. Sie hat nur 130 DM dabei. Wie viele Sektflaschen kann Petra höchstens erwerben?

x sei die Anzahl der Sektflaschen.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 22\text{ DM} + 1 \cdot 42\text{ DM} + x \cdot 12\text{ DM} &\leq 130\text{ DM} & & \\
86\text{ DM} + x \cdot 12\text{ DM} &\leq 130\text{ DM} & & \mid -86\text{ DM} \\
x \cdot 12\text{ DM} &\leq 44\text{ DM} & & \mid \; : \; 12\text{ DM} \\
x &\leq \frac{44}{12} = \frac{11}{3} \approx 3,67 & &
\end{aligned}
$$

Sie kann höchstens 3 Flaschen Sekt kaufen.

Definition: **Ungleichungen** liegen dann vor, wenn Rechenausdrücke (Terme) durch ein Ungleichheitszeichen verbunden sind.

Eigenschaften der „<“-Beziehung:

Symmetrie:	$a < b \iff b > a$
Trichotomie:	Zwischen zwei beliebigen Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ gilt stets eine der folgenden Beziehungen: $r < s$ oder $r = s$ oder $r > s$.
Transitivität:	Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

2.2 Lösung von Ungleichungen mittels Äquivalenzumformungen

Will man eine Ungleichung lösen, so formt man diese so lange um, bis die gesuchte Variable isoliert ist.
Damit man tatsächlich die Lösung der Ungleichung erhält, von der man ausging, dürfen die verwendeten Umformungen die Lösungsmenge nicht ändern - die Umformungen müssen sogenannte **Äquivalenzumformungen** sein.

Für die „<“-Relation gibt es die folgenden

Äquivalenzumformungen:

Addition: $a < b \iff a + c < b + c$ für $c \in \mathbb{R}$

Beispiel: $2 < 3 \iff 2 + 4 < 3 + 4$, da $6 < 7$

Multiplikation: $a < b \iff a \cdot c < b \cdot c$ für $c > 0$

$a < b \iff a \cdot c > b \cdot c$ für $c < 0$

Beispiel: $2 < 3 \quad | \cdot 2 \iff 4 < 6$

$2 < 3 \quad | \cdot (-2) \iff -4 > -6$

> Beachte: Bei der Multiplikation mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Diese Rechenregeln gelten entsprechend auch bei Auftreten der Relationszeichen $\leq, >, \geq$.

Die folgenden Beispiele sollen zeigen, wie man einfache Ungleichungen mittels Äquivalenzumformungen löst:

Beispiele: a)

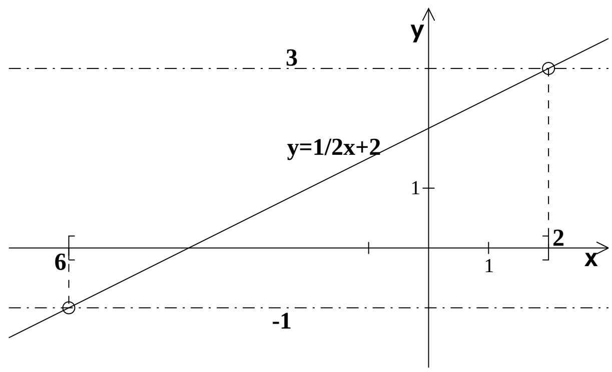
$$\begin{aligned} -x - 7 &\leq 2x + 2 && | + 7 \\ -x &\leq 2x + 9 && | - 2x \\ -3x &\leq 9 && | : (-3) \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} = [-3; \infty)$.

$$
\begin{array}{llll}
\text{b)} & -1 \leq \ \tfrac{1}{2}x+2 & \leq 3 & \quad |-2 \\
& -3 \leq \quad \tfrac{1}{2}x & \leq 1 & \quad |\cdot 2 \\
& -6 \leq \quad x & \leq 2 &
\end{array}
$$

Lösungsmenge $\quad L \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 2\} \ = \ [-6; 2].$

Graphisch dargestellt:



2.3. Bruchungleichungen

Bruchungleichungen lassen sich entsprechend mittels Äquivalenzumformungen lösen.
Da Bruchungleichungen im Nenner des Bruchtermes eine Variable enthalten, kann der Nenner häufig sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Es muss dann - will man zur Lösung der Ungleichung diese mit dem Nenner multiplizieren - eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

Beispiel: $\dfrac{x+1}{x-2} > 2 \quad , \quad x \neq 2 \quad (\text{damit Nenner} \neq 0)$

Fall 1: $x-2>0 \iff x>2$

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{x+1}{x-2} & > & 2 & \quad |\cdot(x-2)>0 \\
x+1 & > & 2(x-2) & \\
x+1 & > & 2x-4 & \quad |+4 \\
x+5 & > & 2x & \quad |-x \\
5 & > & x &
\end{array}
$$

Die Lösungsmenge im ersten Fall ist also
$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\} = (2; 5).$

Fall 2: $x-2<0 \iff x<2$

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{x+1}{x-2} & > & 2 & \quad |\cdot(x-2)<0 \\
x+1 & < & 2(x-2) &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcll} x+1 & < & 2x-4 & \mid +4 \\ x+5 & < & 2x & \mid -x \\ 5 & < & x & \end{array}$$

Im zweiten Fall erhält man also die Bedingungen $x < 2$ **und gleichzeitig** $x > 5$. Das ist aber unmöglich. Folglich gewinnt man im zweiten Fall die Lösungsmenge $L_2 = \{\ \}$.

Die Gesamtlösungsmenge entspricht der Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle, hier also $L \;=\; L_1 \cup L_2 \;=\; (2;5)$.

2.4. Betragsungleichungen

Bei Ungleichungen, in denen Beträge auftreten, sind - ähnlich wie bei Bruchungleichungen - Fallunterscheidungen nötig, da ein Term im Betrag positiv oder negativ oder 0 sein kann.

Beispiel: $|x-10| \quad \leq \quad \frac{1}{2}\,x$

Fall 1: $x - 10 \geq 0 \iff x \geq 10$.
In diesem Fall ist $|x-10| \;=\; x-10$.

$$\begin{array}{rcll} x-10 & \leq & \frac{1}{2}x & \mid \cdot 2 \\ 2x-20 & \leq & x & \mid +20 \\ 2x & \leq & x+20 & \mid -x \\ x & \leq & 20 & \end{array}$$

$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 20\} \;=\; [10;20]$

Fall 2: $x - 10 < 0 \iff x < 10$.

In diesem Fall ist $|x-10| = -(x-10) = -x+10$.

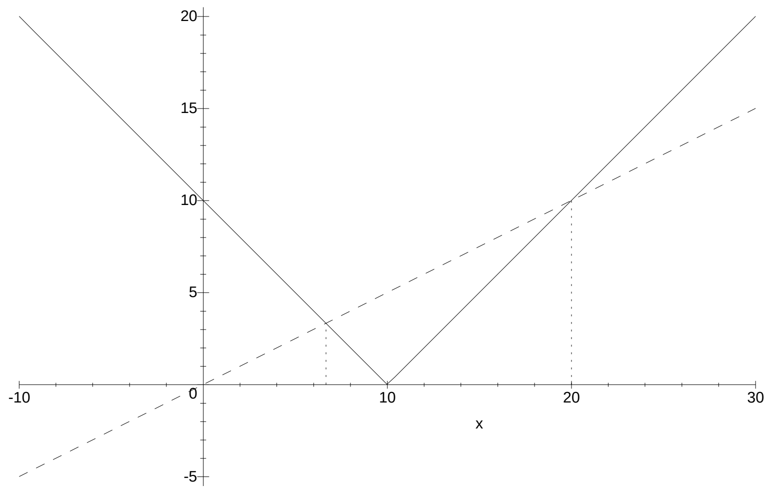
$$\begin{array}{rcll} -x+10 & \leq & \frac{1}{2}x & \mid \cdot 2 \\ -2x+20 & \leq & x & \mid +2x \\ 20 & \leq & 3x & \mid :3 \\ \frac{20}{3} & \leq & x & \end{array}$$

$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{20}{3} \leq x < 10\} = [\frac{20}{3};10)$

Als Gesamtlösungsmenge erhalten wir

$$\begin{aligned} L \;=\; L_1 \cup L_2 \;&=\; \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 20\} \;\cup\; \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{20}{3} \leq x < 10\} \\ &=\; \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{20}{3} \leq x \leq 20\} \;=\; [\tfrac{20}{3};20]. \end{aligned}$$

Graphische Darstellung:



Beispiel 2: $|x+3| \;\leq\; |2x-1| \;+\; 3$

Fall 1: $x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$

$x+3 \;\leq\; |2x-1| \;+\; 3$

Fall 1.1: $2x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x+3 &\leq 2x-1+3 && \mid -3 \\ x &\leq 2x-1 && \mid -2x \\ -x &\leq -1 && \mid :(-1) \\ x &\geq +1 \end{aligned}$$

$$L_{1.1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

Fall 1.2: $2x-1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$

also $|2x-1| \;=\; -(2x-1) \;=\; -2x+1$

$$\begin{aligned} x+3 &\leq -2x+1+3 && \mid -3 \\ x &\leq -2x+1 && \mid +2x \\ 3x &\leq 1 && \mid :3 \\ x &\leq \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$L_{1.2} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq \tfrac{1}{3}\}$$

Fall 2: $x+3 < 0 \iff x < -3$, also $|x+3| = -(x+3) = -x-3$

$-x-3 \;\leq\; |2x-1| \;+\; 3$

Fall 2.1: $2x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$

Die beiden Bedingungen $x < -3$ und $x \geq \frac{1}{2}$ widersprechen sich. Daher kann es in diesem Fall keine Lösung geben. $L_{2.1} = \{\ \}$.

Fall 2.2: $2x - 1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$

also $|2x - 1| \; = \; -(2x - 1) \; = \; -2x + 1.$

$$
\begin{aligned}
-x - 3 \;&\leq\; -2x + 1 + 3 && \mid +3 \\
-x \;&\leq\; -2x + 7 && \mid +2x \\
x \;&\leq\; 7 \\
L_{2.2} \;&=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich als Lösungsmenge

$$
\begin{aligned}
L \;=\; L_{1.1} \;\cup\; L_{1.2} \;\cup\; L_{2.1} \;\cup\; L_{2.2} \;&=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \quad \text{oder} \quad x \leq \tfrac{1}{3}\} \\
&=\; \mathbb{R} \;\setminus\; (\tfrac{1}{3}; 1)
\end{aligned}
$$

V. Funktionen

1. Funktionsbegriff

1.1. Begriffsbestimmung und Definition

In der Mathematik spielt der Begriff der Funktion eine zentrale Rolle. Funktionen treten sowohl in der Wissenschaft als auch im Alltag sehr häufig auf. Unter einer Funktion versteht man eine eindeutige Zuordnung.
Beispiele dafür findet man

- beim Obsteinkauf:	Kauft man z. B. Trauben, so ist jedem Gewicht ein Preis zugeordnet.
- beim Finanzamt:	Jedem Bruttolohn sind nach der Steuertabelle die steuerlichen Abgaben zugeordnet.
- beim Autofahren:	Zu jeder Geschwindigkeit gehört genau ein (Mindest)Sicherheitsabstand.
- an der Börse:	Zu Börsenschluss kann man jeden Tag den Dollarkurs angeben.
- bei der Bestimmung des Idealgewichtes:	Jeder Körpergröße kann man ein Idealgewicht zuordnen.

Gemeinsam ist diesen Beispielen, dass stets einer Ausgangsgröße x (z. B. Obstmenge, Körpergröße) nach einer Vorschrift eindeutig eine andere Größe y (z. B. Preis, Idealgewicht) zugeordnet wird.
Wesentlich für eine Funktion ist der Begriff „*eindeutig*“: So gibt es zu einer bestimmten Traubenmenge genau einen Preis (und nicht zwei oder noch mehr verschiedene Preise).
Eine weitere Gemeinsamkeit bei oben genannten Beispielen besteht darin, dass sowohl die abhängige Variable y als auch die unabhängige Variable x reellen Zahlen entsprechen. Aus der Schule sind Ihnen nur solche „reellen“ Funktionen bekannt, deshalb werden wir uns in diesem Vorkurs auch nur auf solche Funktionen beschränken.
Die mathematisch exakte Definition einer reellen Funktion lautet:

Definition: Eine Zuordnung f, die jeder reellen Zahl x einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ *eindeutig* eine reelle Zahl y zuordnet, heißt **reelle Funktion**.

Schreibweise: $f : D \to W \qquad x \to y.$

Die Beziehung $y = f(x)$, die angibt, wie man jeder Zahl x eine Zahl y zuordnen soll, nennt man **Zuordnungsvorschrift** oder **Funktionsgleichung**.
Die Variable x nennt man **unabhängige Variable,** y **abhängige Variable**. Die Menge D der Zahlen, die x annehmen kann, nennt man **Definitionsbereich**, die Menge W aller möglichen Funktionswerte $y = f(x)$ heißt **Wertebereich**.

Funktionen stellt man entweder mit Hilfe einer Wertetabelle oder graphisch als Schaubild in einem kartesischen Koordinatensystem dar (s. u.).

1.2. Beispiel

Das folgende Beispiel soll die oben eingeführten Begriffe verdeutlichen und anschließend zur Definition eines bestimmten Funktionstyps führen.

Beispiel: Ein Händler verkauft auf dem Markt Trauben für einen Kilopreis von $2,50$ DM. Eine Tragetasche kostet $0,50$ DM.
Wir interessieren uns für den Preis y (in DM), den man für x kg Trauben und eine Tragetasche (die wir auf alle Fälle kaufen) zu bezahlen hat.

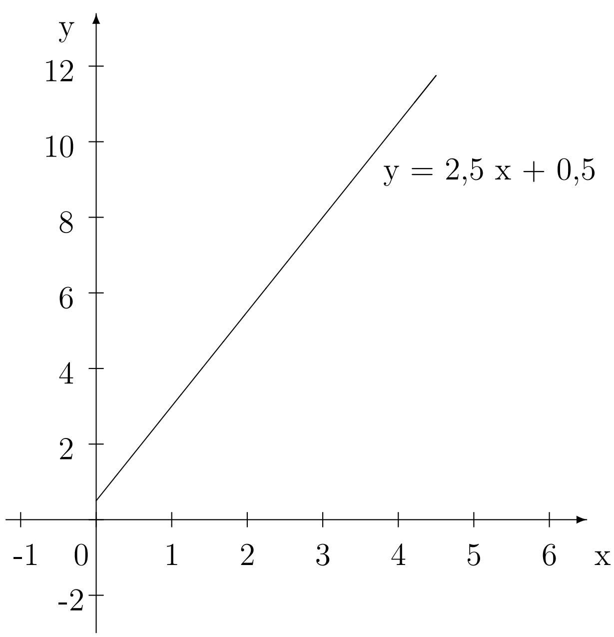
Da jedem Traubengewicht genau ein Preis zugeordnet wird, kann die Beziehung zwischen Preis und Gewicht als Funktion aufgefasst werden. Die Zuordnungsvorschrift lautet dabei:

$$\begin{array}{rcl} \text{Preis} & = & \text{Kilopreis} \cdot \text{Gewicht} + \text{Tragetasche} \\ y & = & 2,50 \quad \cdot \quad x \quad + \quad 0,50 \end{array}$$

Darüber hinaus ist $D = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$, da es keine negativen Gewichte gibt und man (theoretisch) beliebig viele Trauben erhalten kann.
Für den Wertebereich der Funktion gilt $W = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0,5\} = [0,5;\, \infty)$, weil man mindestens $0,50$ DM bezahlt (wenn man nur eine Tragetasche kauft) und der Preis mit steigender Traubenmenge beliebig groß werden kann.
Die Darstellung der Funktion erfolgt entweder mit einer Wertetabelle, in der der Preis für ausgewählte Traubenmengen angegeben wird:

Gewicht x in kg	0	0,5	1	1,5	2	3	5
Preis y in DM	0,50	1,75	3,-	4,25	5,50	8,-	13,-

und/oder der graphischen Veranschaulichung der Zuordnung Gewicht $x \longrightarrow$ Preis y in einem kartesischen Koordinatensystem. In unserem Beispiel erhält man als Schaubild eine Gerade (genau genommen eine Halbgerade).



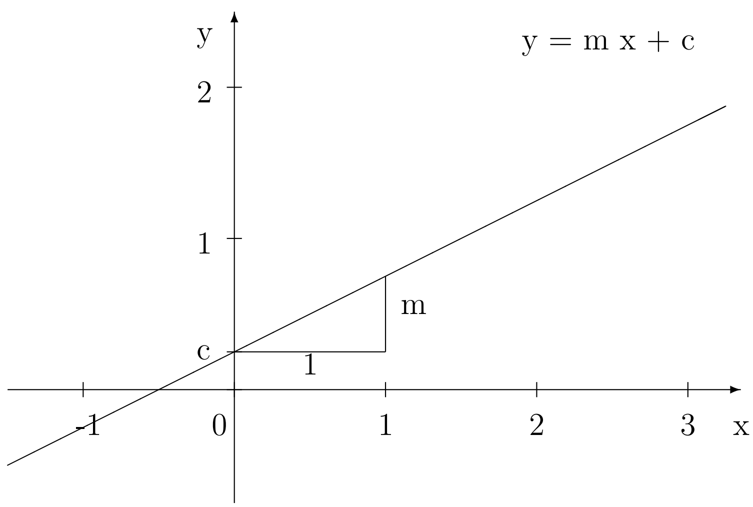
2. Lineare Funktionen

2.1. Definition

In obigem Beispiel stieg der Preis mit jedem Kilogramm Trauben um $2,50$ DM an. Solche Funktionen mit konstanter Steigung treten (insbesondere bei Mengen-Preis- und bei Mengen-Nährwert-Beziehungen) häufig auf.
Sie besitzen stets eine Funktionsgleichung der Form $y = m \cdot x + c$.
Wir definieren daher

Definition:	Unter einer **linearen Funktion** versteht man eine Funktion f mit einer Zuordnungsvorschrift der Form $$y = f(x) = m \cdot x + c.$$ Dabei bezeichnet man m als **Steigung** und c als **y-Achsenabschnitt** von f.

Offenbar erhält man als Schaubild einer linearen Funktion stets eine Gerade:

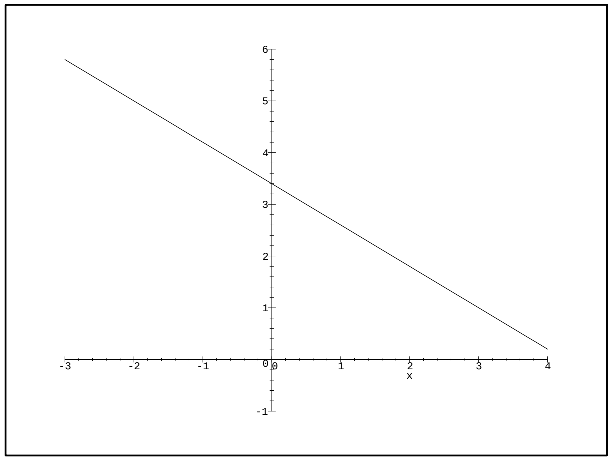


Umgekehrt lassen sich die y-Koordinaten der auf einer (nicht zur y-Achse parallelen) Geraden liegenden Punkte in Abhängigkeit von den x-Koordinaten durch eine Funktionsgleichung der Form $y = mx + c$ beschreiben. Die Gerade ist dann durch die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c eindeutig festgelegt. Dies zeigt, dass lineare Funktionen und Geraden in enger Beziehung zueinander stehen.

2.2. Festlegung einer Geraden durch zwei Punkte

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass jede Gerade durch ihre Steigung m und ihren y-Achsenabschnitt c eindeutig bestimmt ist. Daneben kann jede Gerade aber auch durch Angabe zweier auf der Geraden liegenden Punkte eindeutig festgelegt werden. Das folgende Beispiel soll zeigen, wie man in diesem Fall die Funktionsgleichung der Geraden bestimmen kann.

Beispiel: Welche Gerade geht durch die Punkte $P_1(-2|5)$ und $P_2(3|1)$?



Setzt man die Koordinaten der zwei Punkte in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ nacheinander ein, so erhält man zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten m und c:

$$\begin{array}{lrcll} P_1: & 5 & = & m \cdot (-2) + c & (1) \\ P_2: & 1 & = & m \cdot 3 + c & (2) \end{array}$$

Man kann hier leicht c eliminieren, indem man die zwei Gleichungen voneinander subtrahiert (oder eine Gleichung nach c auflöst und in die andere Gleichung einsetzt):

$$(2) - (1): \qquad -4 = 5 \cdot m \iff m = -\tfrac{4}{5} = -0,8.$$

Den y-Achsenabschnitt c erhält man, indem man m in Gleichung (1) oder (2) einsetzt:

$$m \text{ in } (2): \qquad 1 = 3 \cdot (-0,8) + c \iff c = 1 + 2,4 = 3,4$$

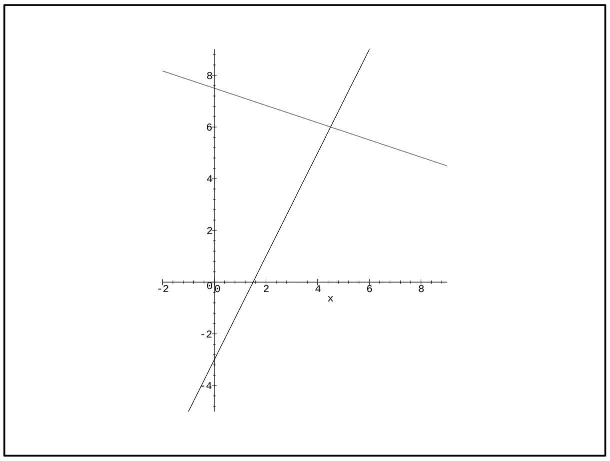
Die Gleichung der Geraden durch P_1 und P_2 lautet somit: $y = -0,8x + 3,4$.

Allgemein: Die Geradengleichung einer durch zwei Punkte verlaufenden Gerade erhält man durch Einsetzen der Punkte in die allgemeine Geradengleichung $y = mx+c$ und anschließende Lösung des entstehenden linearen Gleichungssystems.

2.3. Schnitt zweier Geraden

Will man den Schnittpunkt S zweier Geraden g und h bestimmen, so muss man die Stelle x berechnen, die beim Einsetzen in die Funktionsgleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ denselben y-Wert ergibt. Man sucht also diejenigen x-Werte, für die $f(x) = g(x)$ gilt.

Beispiel: Gesucht ist der Schnittpunkt der Schaubilder der zwei linearen Funktionen $f(x) = 2x - 3$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x + 7\frac{1}{2}$.



Zur Bestimmung des Schnittpunktes müssen wir f und g gleichsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x-3 &= -\tfrac{1}{3}x + 7\tfrac{1}{2} && \mid +\tfrac{1}{3}x + 3 \\ 2\tfrac{1}{3}x &= 10\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{7}{3}x &= \tfrac{21}{2} && \mid \cdot \tfrac{3}{7} \\ x &= \tfrac{21}{2}\cdot\tfrac{3}{7} = \tfrac{9}{2} = 4,5 \end{aligned}$$

Setzt man $x = 4,5$ in $y = f(x)$ oder $y = g(x)$ ein, so erhält man die y-Koordinate des Schnittpunktes $y = 2 \cdot 4,5 - 3 = 6$.

Der Schnittpunkt lautet also $S(4,5\,|\,6)$.

Allgemein:
Die Schnittpunkte der Schaubilder zweier beliebiger Funktionen f und g berechnet man durch Gleichsetzen der zwei Funktionsterme $f(x) = g(x)$.

Bemerkung: Interessiert beim Schneiden zweier Geraden nicht nur der Schnittpunkt, sondern auch noch der **Schnittwinkel** der beiden Geraden, so lässt sich dieser folgendermaßen bestimmen:
Man berechnet zunächst die **Steigungswinkel** α_g und α_h der Geraden g und h mit Hilfe der Beziehung $m_g = \tan(\alpha_g)$ und $m_h = \tan(\alpha_h)$ aus den Steigungen m_g und m_h. Der **Schnittwinkel** δ mit $0 \leq \delta \leq 90^0$ entspricht dann der Differenz der beiden Steigungswinkel.
Will man lediglich nachweisen, dass g und h orthogonal (rechtwinklig, senkrecht) zueinander sind, genügt die Verifizierung der Gleichung

$$m_g \cdot m_h = -1.$$

3. Quadratische Funktionen

3.1. Die Normalparabel f mit $f(x) = x^2$

Betrachtet man die Zuordnung Geschwindigkeit $\longrightarrow$ Bremsweg genauer, so erkennt man, dass hier keine lineare Funktion vorliegen kann. Im Gegensatz zum Obsteinkauf, bei dem zur doppelten Menge auch der doppelte Preis gehört (wenn die Tragetasche nicht mitgerechnet wird), hat ein Auto mit der doppelten Geschwindigkeit (z. B. statt 50 km/h 100 km/h) nicht den doppelten Bremsweg, sondern den vierfachen (im Bsp. statt 25 m jetzt 100 m). Hier liegt eine **quadratische Funktion** vor.

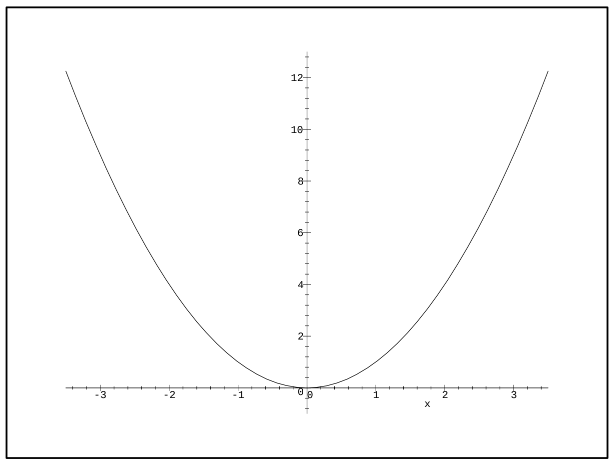
Die einfachste quadratische Funktion f ist diejenige, die jeder reellen Zahl x ihre Quadratzahl x^2 zuordnet: $f : x \longrightarrow x^2$.

Wertetabelle von $y = x^2$:

x	0	$\pm 0,5$	± 1	$\pm\sqrt{2}$	$\pm 1,5$	± 2	± 3
y	0	0,25	1	2	2,25	4	9

Das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2$ ist eine nach oben geöffnete **Normalparabel**:

Den Punkt $S(0|0)$ nennt man **Scheitel** der Parabel.
Die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse, d. h. die Stelle x und die Stelle $-x$ besitzen denselben y-Wert (Es gilt also $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$).



Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W = \mathbb{R}_0^+$

3.2. Strecken und Stauchen der Normalparabel

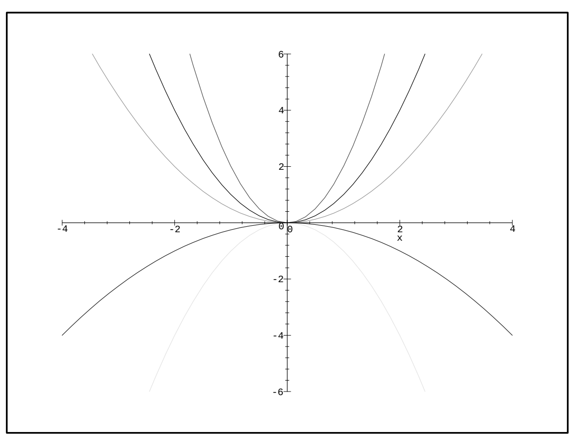
Betrachtet man statt der Funktionsgleichnung $f(x) = x^2$ Funktionsgleichungen der Form $g(x) = ax^2$ mit einem Faktor $a \neq 0$, so ergeben sich für das Schaubild folgende Änderungen:

Das Schaubild der Funktion $g(x) = a \cdot x^2$ stellt

- für $a > 1$ eine um den Faktor a in y-Richtung gestreckte,

- für $0 < a < 1$ eine um den Faktor a in y-Richtung gestauchte Normalparabel dar.

- Ist $a < 0$, so kommt zur Streckung oder Stauchung mit dem Faktor $|a|$ zusätzlich noch eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.



Der Scheitel S der Parabel bleibt dabei unverändert $S(0|0)$.

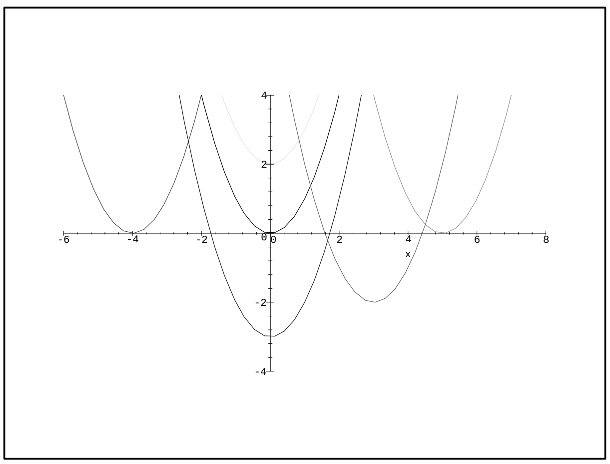
Statt von einer Veränderung der Funktionsgleichung auszugehen und die Veränderungen, die sich für die Schaubilder ergeben, zu betrachten, kann man auch das Schaubild strecken, stauchen oder spiegeln und die Auswirkungen auf die Funktionsgleichung untersuchen. Man erhält dann im Wesentlichen die gleichen Resultate.

3.3. Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel $f(x) = x^2$ um die Strecke e in Richtung der y-Achse, so lautet die Gleichung der verschobenen Parabel $g(x) = x^2 + e$.
Der Scheitel S von g liegt bei $S(0\,|\,e)$; für $e > 0$ wird die Parabel nach oben, für $e < 0$ nach unten verschoben.

Verschiebt man die Normalparabel $f(x) = x^2$ um die Strecke d in Richtung der x-Achse, so lautet die Gleichung der verschobenen Parabel $g(x) = (x - d)^2$, d.h. man ersetzt im Funktionsterm x durch $x - d$.
Der Scheitel S von g liegt bei $S(d\,|\,0)$, dabei wird die Parabel für $d > 0$ nach rechts, für $d < 0$ nach links verschoben.

Hierzu einige Beispiele:



Bemerkung: Man kann auch das Schaubild einer jeden beliebigen anderen Funktion f strecken, stauchen, spiegeln und verschieben. Dabei wird der zu dem Schaubild gehörende Funktionsterm $f(x)$ wie folgt verändert:

- Streckung/Stauchung des Schaubilds mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung mit zusätzlicher Spiegelung an der x-Achse für $a < 0$
  $\Longleftrightarrow$ Multiplikation des Funktionsterms $f(x)$ mit einem Faktor a.

- Verschiebung des Schaubilds in y-Richtung um e
  $\Longleftrightarrow$ Addition einer Konstanten e zu $f(x)$.

- Verschiebung des Schaubilds in x-Richtung um d
  $\Longleftrightarrow$ Ersetzen von x durch $x - d$ im Funktionsterm $f(x)$.

3.4. Gleichungsformen beliebiger Parabeln

Da jede Normalparabel durch Strecken, Stauchen, Spiegeln und Verschieben der Parabel mit Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ gewonnen werden kann, zeigen die oben durchgeführten Überlegungen, dass sich Parabeln allgemein durch Gleichungen der Form

$$f(x) = a(x-d)^2 + e \qquad \text{(Scheitelform)}$$

beschreiben lassen. Durch Anwendung der Binomischen Formeln, Ausmultiplizieren und Umbenennung von Parametern erhält man daraus die *allgemeine Parabelform*:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{(allgemeine Parabelform).}$$

(Parabeln stehen mit quadratischen Funktionen also in einem ähnlich engen Zusammenhang wie Geraden mit linearen Funktionen).
Schneidet die vorliegende Parabel die x-Achse in den Punkten $N_1(x_1 \,|\, 0)$ und $N_2(x_2 \,|\, 0)$, kann die Gleichung der Parabel darüber hinaus in der Form

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{(Nullstellenform)}$$

geschrieben werden.

Zusammenfassung (Gleichungsformen beliebiger Parabeln):

Scheitelform:	$f(x) = a(x-d)^2 + e$
allgemeine Form:	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Nullstellenform:	$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$

3.5. Umwandlung einer Gleichungsform in eine andere Gleichungsform

Die oben eingeführten Gleichungsformen von Parabeln eignen sich für verschiedene Zwecke unterschiedlich gut.
So kann man beispielsweise an der Scheitelform sofort den Scheitel $S(d \,|\, e)$ und den Streckungs-/Stauchungsfaktor a der Parabel, nicht jedoch die Schnittpunkte mit der x-Achse, ablesen.
Die Nullstellenform erlaubt hingegen eine sofortige Angabe der Schnittpunkte mit der x-Achse, nicht jedoch die Nennung des Scheitelpunktes.
Es ist daher erforderlich die Gleichungsformen ineinander überführen zu können. Wir betrachten die folgenden Fälle:

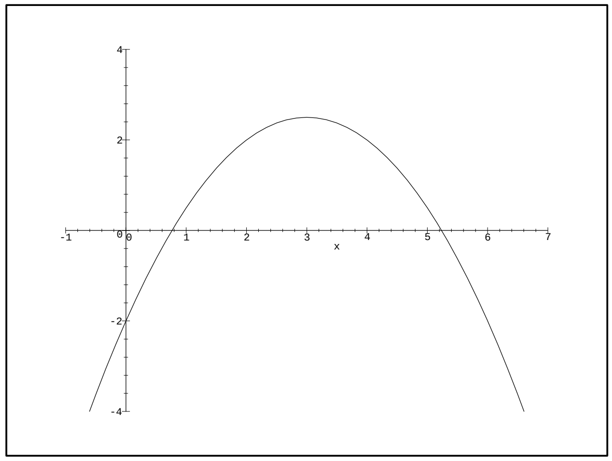
<u>Von der allgemeinen Form zur Scheitelform</u>

Die Scheitelform erhält man aus der allgemeinen Form durch **quadratische Ergänzung**.

Beispiel: Gesucht ist die Scheitelform der Parabel mit Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

1. Ausklammern des Koeffizienten vor x^2: $f(x) = -\frac{1}{2}\big(x^2 - 6x\big) - 2$
2. Quadratische Ergänzung, so dass man die Klammer als Binom schreiben kann: $f(x) = -\frac{1}{2}\big(x^2 - 6x + \mathbf{9} - \mathbf{9}\big) - 2$
3. Herausziehen des Korrekturgliedes: $f(x) = -\frac{1}{2}\big(x^2 - 6x + 9\big) + \frac{9}{2} - 2$
4. Umschreiben der Klammer mit Hilfe der binomischen Formeln: $f(x) = -\frac{1}{2}\big(x - 3\big)^2 \; + \; \frac{5}{2}$.

Der Scheitelform entnimmt man, dass die Parabel eine mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestauchte und an der x-Achse gespiegelte - also eine nach unten geöffnete - Parabel ist.
Ihr Scheitel liegt bei $S(3\,|\,2,5)$, d.h. die Parabel wurde um 3 nach rechts und 2,5 nach oben verschoben.



Von der allgemeinen Parabelform zur Nullstellenform

Falls eine gegebene Parabel die x-Achse in den Punkten $N_1(x_1\,|\,0)$ und $N_2(x_2\,|\,0)$ schneidet, lässt sich die Parabelgleichung in der Nullstellenform $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ schreiben. Dazu muss man die quadratische Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ lösen.

Beispiel: Die Nullstellenform der Parabel mit Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ ergibt sich aus dem Ansatz

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 2 \;=\; 0$$

Mit der Mitternachtsformel (s. S. 24) erhält man

$$x_{1,2} = \; 3 \pm \sqrt{5}$$

Also ist $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3 - \sqrt{5})(x - 3 + \sqrt{5})$.

Die Parabel schneidet folglich die x-Achse in den Punkten

$$N_1\,(\underbrace{3+\sqrt{5}}_{\approx\,5{,}24}\;|\;0) \quad \text{und} \quad N_2\,(\underbrace{3-\sqrt{5}}_{\approx\,0{,}76}\;|\;0).$$

4. Ganzrationale Funktionen

4.1. Definition ganzrationaler Funktionen

Definition: Eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;\;=\;\; a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \;(n \in \mathbb{N}_0\,,\; a_k \in \mathbb{R}\,,\; a_n \neq 0)$$

heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grades**.
Der Funktionsterm wird auch als **Polynom** bezeichnet.

Beachte: $x^0 \;=\; 1 \quad , \quad x^1 \;=\; x\,.$

Beispiele: a) Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ ist ganzrational vom Grad 3.
b) Die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x - 3$ ist ganzrational vom Grad 4.
c) Die Funktion h mit $h(x) = x^2 - 3$ ist ganzrational vom Grad 2.

4.2. Nullstellenbestimmung bei ganzrationalen Funktionen (Polynomdivision)

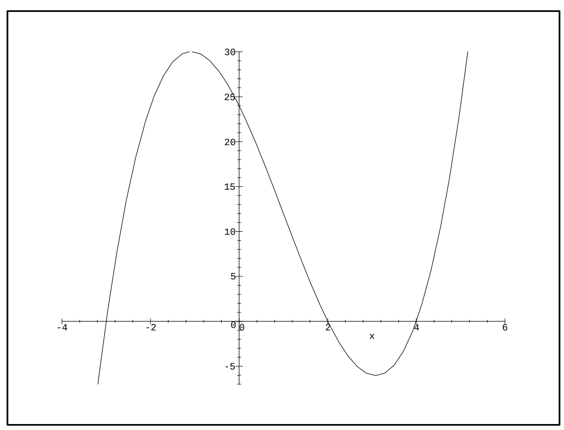
Bei der Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen interessieren neben Hoch-, Tief- und Wendepunkten (vgl. Differentialrechnung) vor allem die Schnittpunkte des Schaubildes mit den Koordinatenachsen.
Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man durch Einsetzen des Wertes $x = 0$ in die Funktionsgleichung. Er kann daher leicht berechnet werden.
Anders sieht dies bei der Bestimmung der Schnittpunkte mit der x-Achse aus. Hier ist die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Da es für eine solche Gleichung im Allgemeinen jedoch keine Lösungsformel mehr gibt, muss man eine oder mehrere Nullstelle(n) erraten.
Bei den von uns betrachteten Gleichungen hilft dabei oft die folgende Regel:

Satz: Ist $x = x_1$ eine ganzzahlige Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten, so ist x_1 Teiler des Absolutgliedes a_0 des Polynoms.

Beispiel: Das Polynom $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ besitzt ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten. Besitzt f eine ganzzahlige Nullstelle x_1, so muss diese das Absolutglied $a_0 = 24$ teilen. Als ganzzahlige Nullstellen kommen daher nur die Werte $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$ oder ± 24 in Betracht. Durch Einsetzen lässt sich nun leicht nachprüfen, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle der Funktion ist.

Um nun weitere Nullstellen der Funktion f zu bestimmen, führt man eine **Polynomdivision** durch. Diese ähnelt der schriftlichen Division gewöhnlicher Zahlen.

Beispiel 1:
Zur Berechnung weiterer Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ dividieren wir $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_1$ (Dabei ist $x_1 = 2$ die oben erratene Nullstelle).



$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 3x^2 - 10x + 24) \; : \; (x - 2) \; = \; x^2 - x - 12 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad - \quad x^2 - 10x \\
\qquad \underline{-(-x^2 + \ 2x)} \\
\qquad\qquad\qquad -12x + 24 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-12x + 24)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

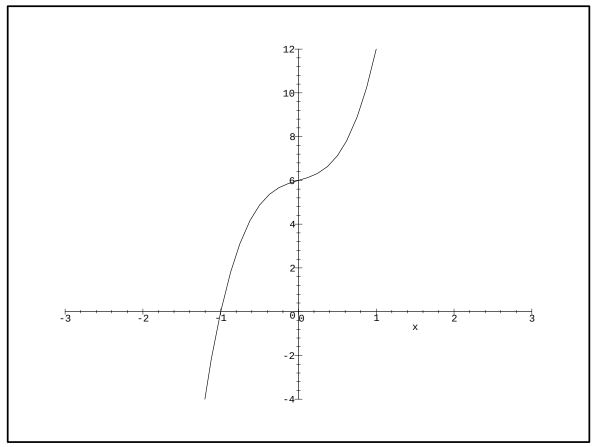
Die Polynomdivision liefert nun das Polynom $g(x) = x^2 - x - 12$, das einen niedrigeren Grad besitzt als f. Da jede Nullstelle von g auch Nullstelle von f ist (Übung), erhält man nun die weiteren (zwei) Nullstellen von f durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$. Es ergibt sich hier also $x_2 = 4, x_3 = -3$.

Merke:
Zur Bestimmung der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad $n(\geq 3)$ geht man wie folgt vor:

1. Erraten einer Nullstelle x_1.
2. Durchführung der Polynomdivision $f(x) : (x - x_1) = g(x)$
   (Dabei ist g eine ganzrationale Funktion vom Grad $n-1$).
3. Bestimmmung der Nullstellen der ganzrationalen Funktion g
   (Diese entsprechen den (weiteren) Nullstellen von f).

Bei ganzrationalen Funktionen vom Grad $n > 3$ müssen die Schritte 1.-3. wiederholt ausgeführt werden.

Beispiel 2:
Gesucht sind die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 5x^3 + x + 6$ (Beachte: Hier fehlt das x^2-Glied).



1. Man sieht/rät, dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle von f ist (vgl. Satz, S.41).
2. Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(5x^3 \qquad + x + 6) : (x+1) = 5x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(5x^3 + 5x^2)} \\
\qquad -5x^2 + x \\
\quad \underline{-(-5x^2 - 5x)} \\
\qquad\qquad 6x + 6 \\
\qquad\quad \underline{-(6x + 6)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

3. Da die Gleichung $5x^2 - 5x + 6 = 0$ keine Lösung besitzt, ist x_1 die einzige Nullstelle der Funktion f.

5. Gebrochenrationale Funktionen

5.1. Definition und Beispiel einer gebrochenrationalen Funktion

Definition: Unter einer **gebrochenrationalen Funktion** f versteht man eine Funktion, deren Funktionswert als Quotient zweier Polynome $g(x)$, $h(x)$ geschrieben werden kann: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

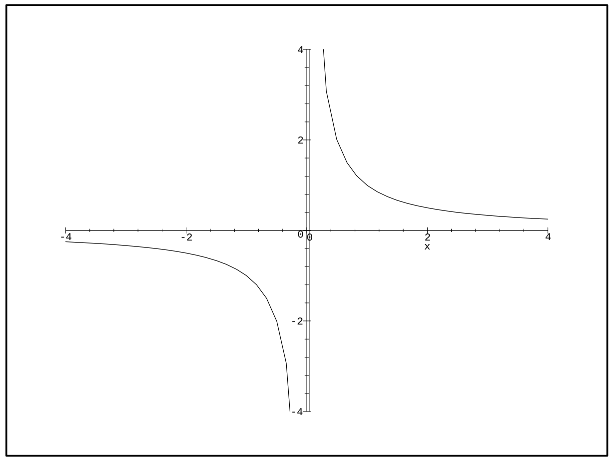
Den Definitionsbereich D von f erhält man durch Ausschließen der Elemente von $\mathbb{R}$, bei denen der Nenner $h(x) = 0$ wird: $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}$.

Die einfachste gebrochenrationale Funktionen ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.
Die Funktion f ist definiert für alle reellen Zahlen $x \neq 0$: Es gilt also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wertetabelle von $y = f(x) = \frac{1}{x}$:

x	-5	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5
y	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-5	5	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

Das Schaubild von f ist eine Hyperbel:



Nähert sich x der Polstelle $x_1 = 0$ an, so wächst $y = f(x)$ gegen $\pm\infty$ - je nachdem, ob man sich der Stelle von rechts oder von links annähert. Man bezeichnet deshalb die y-Achse als **senkrechte Asymptote** von f. Für sehr große x, d. h. für $x \to \infty$, nähert sich das Schaubild von f immer mehr der x-Achse, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Die x-Achse ist **waagrechte Asymptote** von f. Das gleiche gilt auch für $x \to -\infty$. Als Wertebereich erhält man $W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5.2. Null- und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen

Merke: Die **Nullstellen** einer gebrochenrationalen Funktion $f = \frac{g}{h}$ erhält man, wenn man den **Zähler** $g(x) = 0$ setzt.
Die **Definitionslücken** von f erhält man, wenn man den **Nenner** $h(x) = 0$ setzt. Gilt für eine Definitionslücke x_1 darüber hinaus $g(x_1) \neq 0$, so bezeichnet man x_1 als **Polstelle** von f.

Beispiele: a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

Nullstelle: $x = 1$

Polstelle: keine, da der Nenner nie Null wird.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$ $\qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

Polstelle: $x_3 = -2$

Beachte: Hier ist $x_2 = 1$ sowohl Nullstelle des Zählers als auch des Nenners. Deshalb liegt bei $x_2 = 1$ **keine** Polstelle vor.
Man kann jedoch den Zähler und den Nenner in **Linearfaktoren** zerlegen:

$$f(x) = \frac{x\,(x-1)}{(x-1)\,(x+2)} \overset{x \neq 1}{=} \frac{x}{x+2}$$

Mit der Festlegung $f(1) = \frac{1}{3}$ lässt sich nun der Definitionsbereich zu $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ vergrößern. Deshalb bezeichnet man die Stelle $x = 1$ als **hebbare Definitionslücke**.

5.3. Verhalten gebrochenrationaler Funktionen für $|x| \to \infty$

Interessant ist bei gebrochenrationalen Funktionen auch das Verhalten von f für betragsmäßig große x-Werte, d. h. für $|x| \to \infty$.
Je nach Grad des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms ergeben sich verschiedene Fälle:

<u>Fall 1:</u> Grad Zähler $<$ Grad Nenner

Beispiel: $f(x) = \dfrac{8x^2 - 5}{x^3 + 8x - 1}$

Da das Nennerpolynom für große x viel schneller wächst als das Zählerpolynom, gilt für $|x| \to \infty$ stets $f(x) \to 0$, d. h. das Schaubild von f nähert sich für betragsmäßig große x-Werte immer mehr der x-Achse an. Man sagt: Das Schaubild von f besitzt die x-Achse ($y = 0$) als waagrechte Asymptote.

<u>Fall 2:</u> Grad Zähler $=$ Grad Nenner

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x}{x^2 + x + 9}$

Hier kürzt man Zähler und Nenner mit der höchsten Potenz, im Beispiel also mit x^2:

$f(x) = \dfrac{2 - \frac{7}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{9}{x^2}}$. Da für $|x| \to \infty$ alle Summanden mit x oder x^2 im Nenner

gegen 0 streben, folgt $f(x) \to 2$.
Das Schaubild von f besitzt folglich die waagrechte Asymptote $y = 2$.

<u>Fall 3:</u> Grad Zähler $>$ Grad Nenner

Hier kann man die gebrochenrationale Funktion durch **Polynomdivision mit Rest** in einen ganzrationalen und einen gebrochenrationalen Anteil (mit Grad Zähler $<$ Grad Nenner) zerlegen. Für $|x| \to \infty$ wird das Verhalten von $f(x)$ dann durch den ganzrationalen Anteil von f beschrieben.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 + x - 2}{x^2 + 2x + 3}$

Polynomdivision mit Rest ergibt:

$$\left(\tfrac{1}{2}x^3 \qquad + x - 2\right) : (x^2 + 2x + 3) = \underbrace{\tfrac{1}{2}x - 1}_{\text{ganzrat.}} + \underbrace{\frac{\frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 2x + 3}}_{\text{gebr. rat.}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(\tfrac{1}{2}x^3 + x^2 + \tfrac{3}{2}x\right) \\ \hline \qquad -x^2 - \tfrac{1}{2}x \\ \quad -(-x^2 - 2x - 3) \\ \hline \qquad\qquad \tfrac{3}{2}x + 1 \end{array}$$

Das Schaubild der Funktion f nähert sich für $|x| \to \infty$ immer mehr der Geraden $y = \frac{1}{2}x - 1$ an. Man bezeichnet daher diese Gerade als **schiefe Asymptote**.

6. Exponentialfunktionen

6.1. Die Familie der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$

Viele Wachstumsvorgänge zeigen (unter gewissen Voraussetzungen) eine charakteristische Dynamik: Sie nehmen, unabhängig vom Zeitpunkt t, in immer gleichen Zeitabschnitten Δt um den gleichen Faktor zu. So vermehren sich z. B. Bakterien oder Kaninchen (bei angemessenem Lebensraum und Nahrungsmittelversorgung) in der Weise, dass sich ihre Anzahl stets in gleichen Zeiträumen verdoppelt. Auch die Verzinsung von Kapital funktioniert nach diesem Prinzip. Liegt z. B. ein Zinssatz von 5% zugrunde, so vermehrt sich das Kapital jedes Jahr mit dem Faktor 1,05.
Salopp lässt sich sagen: Je mehr schon vorhanden ist, desto größer ist auch der Zuwachs.
Ähnlich lassen sich auch viele Vorgänge nennen, bei denen eine Größe mit einem festen Faktor oder Prozentsatz abnimmt bzw. zerfällt (z. B. Wertverlust eines Autos, Abkühlung von Flüssigkeiten). Betrachten wir ein einfaches

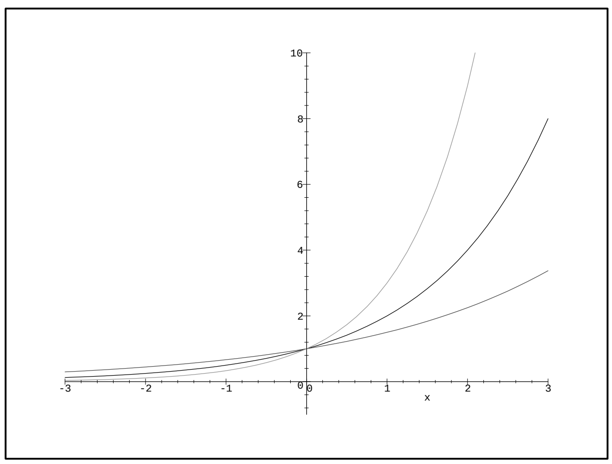
Beispiel:
Verdoppelt sich etwa eine Kaninchenpopulation jeden Monat und war zu Beginn ein Kaninchenpaar vorhanden, so lässt sich die Zahl der nach x Monaten vorhandenen Kaninchenpaare y in der Form $y = 2^x$ angeben.

Wertetabelle der Funktion f mit $f(x) = 2^x$:

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

(Zur Erinnerung: $2^{0,5} = \sqrt{2}$ und $2^{-1} = \frac{1}{2}$)

Das Schaubild von f geht durch den Punkt $P(0|1)$ und verläuft stets oberhalb der x-Achse (denn für jedes x ist $2^x > 0$). Des Weiteren ist für negative x-Werte die x-Achse Asymptote. Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, der Wertebereich $W = \mathbb{R}^+$.

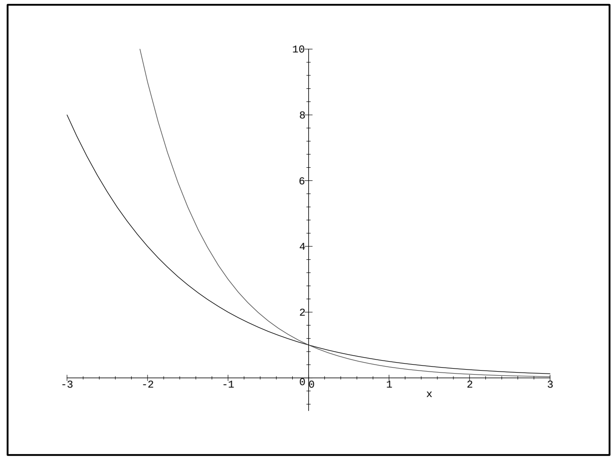


Ähnlich verläuft das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3^x$ bzw. das Schaubild einer jeden Funktion f der Form $f(x) = a^x$ mit $a > 1$.

Beispiel: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,5^x = 2^{-x}$

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3
y	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Das Schaubild geht ebenfalls durch den Punkt P(0|1) und verläuft wieder oberhalb der x-Achse. Im Gegensatz zum obigen Beispiel fällt f jedoch. Die beiden Schaubilder sind zueinander bzgl. der y-Achse gespiegelt. Mithin bildet für große x-Werte die x-Achse eine Asymptote und es gilt $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$.



Ähnlich verläuft auch das Schaubild von f mit $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ bzw. das Schaubild einer jeden Funktion f der Form $f(x) = a^x$ mit $0 < a < 1$.

Definition: Funktionen mit einer Funktionsgleichung der Form $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ nennt man **Exponentialfunktionen** zur Basis a (Die Bezeichnung weist auf das Auftreten der unabhängigen Variablen x im Exponenten hin).

Bemerkung:
- Für $a < 0$ ist die Funktion $f(x) = a^x$ nicht definiert - man bekäme sonst Probleme wie z. B. $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} = ?$.
- Für $a = 1$ ist das Schaubild der Funktion $f(x) = a^x$ die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $P(0|1)$. Wegen ihres untypischen Aussehens wird sie ebenfalls nicht den Exponentialfunktionen zugerechnet.

Eigenschaften der Schaubilder der Exponentialfunktionen:

- Alle Schaubilder gehen durch den Punkt (0|1), verlaufen oberhalb der x-Achse und schneiden diese nie ($W = \mathbb{R}^+$).
- Für $a > 1$ sind die Schaubilder (streng monoton) wachsend/steigend, für $0 < a < 1$ (streng monoton) fallend.

Bemerkung: Eine besondere Funktion stellt die Exponentialfunktion zur Basis $e \approx 2,718$ (Eulersche Zahl), die sogenannte e-Funktion, dar. Sie ist die einzige Funktion bei der in jedem Punkt die Steigung mit dem Funktionswert übereinstimmt.

6.2. Praktische Anwendungen der Exponentialfunktionen bei Wachstumsvorgängen

Zur Beschreibung von exponentiellen Wachstumsvorgängen verwendet man Funktionen f der Form $f(t) = c \cdot a^t$. Da bei praktischen Anwendungen die unabhängige Variable x meist die Zeit repräsentiert (man denke an obige Beispiele) benutzt man statt der Variablen x häufig auch die Variable t.

Beschreibung exponentieller Wachstumsvorgänge

Um nun einen exponentiellen Wachstumsvorgang beschreiben zu können, muss man zunächst aus gegebenen Daten die Parameter c und a bestimmen. Damit kann man dann zu beliebigen Zeiten t den jeweiligen Bestand $f(t)$ angeben.

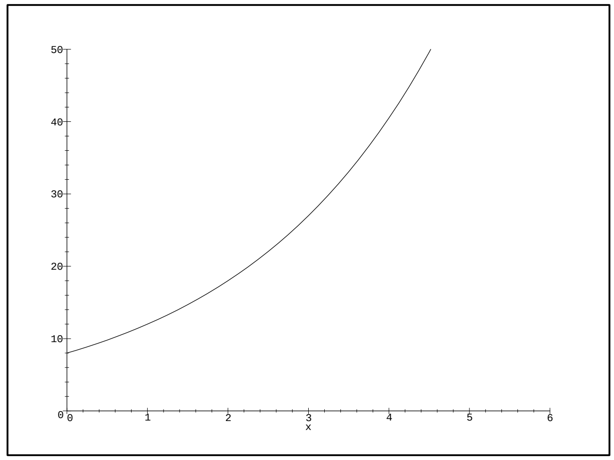
Beispiel: Ein Meerschweinchenzüchter hat zu Beginn seiner Zucht 8 Meerschweinchen (4 männliche, 4 weibliche). Nach 3 Monaten hoppeln bereits 27 Tiere durch das Gehege.

Den Angaben im Beispiel entnimmt man folgende Werte:

Bestand zu Beginn ($t = 0$)	$f(0) = c \cdot a^0 = c = 8$	(1)
Bestand nach 3 Monaten ($t = 3$)	$f(3) = c \cdot a^3 = 27$	(2)

Aus den zwei Gleichungen (1) und (2) kann man nun die zwei Unbekannten c und a bestimmen. Da Gleichung (1) für den Parameter c schon die Lösung $c = 8$ liefert, setzt man diese in (2) ein und erhält so

$$8 \cdot a^3 = 27 \iff a^3 = \frac{27}{8}$$
$$\iff a = 1,5$$



Ergebnis: Nach t Monaten befinden sich $f(t) = 8 \cdot 1,5^t$ Meerschweinchen im Gehege.

Nach einem Jahr ($t = 12$) hätte der Züchter also bereits $f(12) = 8 \cdot 1,5^{12} \approx 1038$ Meerschweinchen.

Bemerkung: Ist der Wert $f(0)$ zu Beginn nicht gegeben, so kann/muss man Gleichung (1) nach c auflösen und in Gleichung (2) einsetzen.

Prozentangaben bei Wachstumsvorgängen

Bei einigen Wachstumsvorgängen (z. B. bei der Verzinsung von Kapital) gibt man an, um wie viel Prozent p eine Größe in einer Zeiteinheit wächst.

An dem Parameter a kann man die prozentuale Zunahme p ablesen. In unserem Meerschweinchenbeispiel vermehrt sich beispielsweise die Zahl der Meerschweinchen jeden Monat um den Faktor $a = 1,5$, d. h. ihre Zahl wächst monatlich um 50%.

Allgemein gilt:

Wächst eine gemäß $f(t) = c \cdot a^t$ $(a > 1)$ zunehmende Größe pro Zeiteinheit (1 Jahr, 1 Monat) um p%, so ist:

$$a = 1 + \frac{p}{100} \qquad \text{und} \qquad f(t) = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Gerade bei der Kapitalverzinsung wird diese Form der Exponentialfunktion verwendet; die Konstante c (das Anfangskapital) wird hier üblicherweise mit K_0, der Funktionsterm mit $K(t)$ bezeichnet.

Berechnung des Erreichens eines bestimmten Bestandes

Neben der Frage, welcher Bestand zu einem gegebenen Zeitpunkt vorhanden ist, kann man mit Hilfe von Exponentialfunktionen auch die Frage klären, zu welchem Zeitpunkt ein gegebener Bestand erreicht wird.

Beispiel: Wann wird in obigem Beispiel das Gehege zu klein, wenn dort maximal 2000 Meerschweinchen Platz haben?

$$\begin{aligned} f(t) &= 8 \cdot 1,5^t = 2000 && \mid :8 \\ 1,5^t &= 250 && \mid \ln \\ \ln(1,5^t) &= \ln 250 && \\ t \cdot \ln 1,5 &= \ln 250 && \mid :\ln 1,5 \\ t &= \frac{\ln 250}{\ln 1,5} = 13,61... \approx 13,6 && \end{aligned}$$

Ergebnis: Nach etwa 13,6 Monaten wird es für die Meerschweinchen eng.

7. Umkehrfunktionen

Beispiel: Die Logarithmusfunktion

Im vorangegangenen Beispiel haben wir zur Berechnung des Zeitpunktes des Erreichens eines bestimmten Bestandes eine Exponentialgleichung logarithmiert. Verallgemeinern wir dieses Beispiel so erhalten wir eine Logarithmusfunktion:

Dazu betrachten wir nocheinmal die Wertetabelle der Funktion f mit Funktionswert $f(x) = y = 2^x$ (vgl. obere Kurve):

$f \downarrow$

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	y
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	x

$\uparrow f^{-1}$

Hier ordnet die Funktion f z. B. der Zahl 3 den Wert 8 ($f : 3 \rightarrow 8$) und der Zahl $\frac{1}{2}$ den Funktionswert $\sqrt{2}$ ($f : \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{2}$) zu.

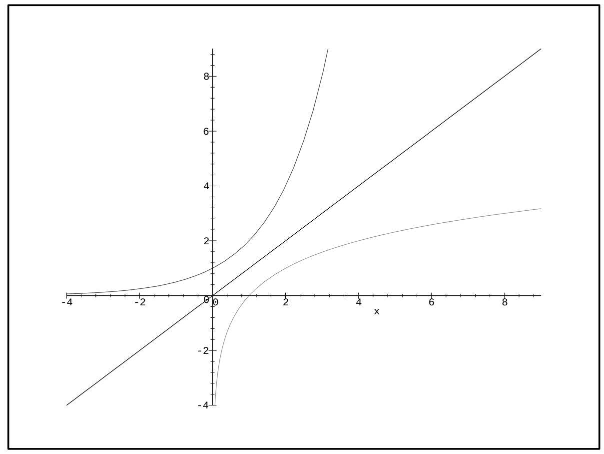
Nun drehen wir den Spieß um: Wir betrachten die Funktion f^{-1}, die der Zahl 8 die Zahl 3, der Zahl $\sqrt{2}$ die Zahl $\frac{1}{2}$ usw. zuordnet. D. h. die neue Funktion f^{-1} ordnet den Zahlen der unteren Zeile der Wertetabelle von f die entsprechenden Zahlen der oberen Zeile zu - die Zuordnung wird gerade umgekehrt. Man nennt f^{-1} daher auch **Umkehrfunktion** von f.

Die unabhängige Variable x steht nun in der unteren, die abhängige Variable y in der oberen Zeile; wir haben x und y vertauscht.

Zeichnet man die Punkte mit diesen vertauschten x- und y-Werten in ein Koordinatensystem ein, so erhält man die untere Kurve im folgenden Schaubild.

Um die Funktionsgleichung von f^{-1} zu bestimmen, müssen wir auch in der Funktionsgleichung $(f(x) =)y = 2^x$ die Variablen x und y vertauschen.
Es ergibt sich $\quad x = 2^y$.
Durch Logarithmieren löst man die Gleichung nach y auf: $\quad y = \log_2 x$.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f : y = 2^x$ ist also die **Logarithmusfunktion** $f^{-1} : y = \log_2 x$.



In entsprechender Weise erhält man als Umkehrfunktion f^{-1} der Exponentialfunktion f mit $f(x) = y = a^x$ die Logarithmusfunktion $f^{-1} : x \longrightarrow \log_a x$, die jeder positiven reellen Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ seinen Logarithmus $\log_a x$ zur Basis a zuordnet. Dazu muss $a > 0$ und $a \neq 1$ vorausgesetzt werden (vgl. III.2).

Allgemein gilt:
Eine beliebige Funktion $f : D_f \to W_f \qquad x \to f(x)$ kann in eindeutiger Weise umgekehrt werden, wenn jede zur x-Achse parallele Gerade das Schaubild von f höchstens einmal schneidet. In diesem Fall erhält man die Umkehrfunktion, indem man

1. die Variablen x und y in $y = f(x)$ vertauscht: $\qquad x = f(y)$;
2. die neue Beziehung nach y auflöst: $\qquad y = f^{-1}(x)$.
3. Definitions- und Wertebereich vertauscht: $\qquad D_{f^{-1}} = W_f \quad ; \quad W_{f^{-1}} = D_f$.

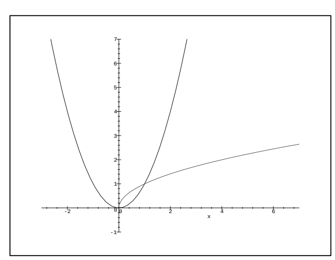
Graphisch bedeutet dies:
Das Schaubild von f^{-1} entsteht aus dem Schaubild von f durch **Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden** $y = x$.

Durch Einschränkung des Definitionsbereiches können darüber hinaus auch für Funktionen, die obige Voraussetzung nicht erfüllen, Umkehrfunktionen bestimmt werden.

Beispiel: Die Wurzelfunktion
Will man die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion $f : y = x^2$ bestimmen, so muss man sich auf den positiven (oder negativen) Ast der Parabel beschränken.
Da nämlich f z. B. sowohl 2 als auch -2 den Wert 4 zuordnet, könnte man ansonsten die Zuordnung nicht eindeutig umkehren: Ist $f^{-1}(4) = 2$ oder $f^{-1}(4) = -2$?
Man muss also den maximalen Definitionsbereich D von f einschränken, und zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}_0^-$.

Üblicherweise beschränkt man sich auf $D_f = \mathbb{R}_0^+$. Dann ergibt sich für $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(y) &= y^2 = x \\ \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) &= y = \sqrt{x} \end{aligned}$$

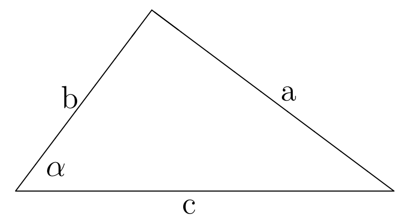


8. Trigonometrische Funktionen

In vielen naturwissenschaftlichen Teilbereichen, beispielsweise der Schwingungslehre in der Physik und der Geodäsie, spielen die trigonometrischen Funktionen sin und cos eine bedeutende Rolle. Wir befassen uns deshalb etwas genauer mit diesen Funktionen.

8.1. Dreiecksberechnung mit dem Sinus und dem Kosinus

In der Mittelstufe werden der Sinus und der Kosinus als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck eingeführt. Dabei entspricht der Sinus eines Winkels dem Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse. Mit den im Schaubild eingeführten Bezeichnungen gilt also:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Der Kosinus ist hingegen als Quotient aus Ankathete und Hypotenuse definiert:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Mit diesen Definitionen lassen sich nun in einem rechtwinkligen Dreieck Seitenlängen und Winkelmaße bestimmen.

Beispiel: Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 30°, \gamma = 90°$ und $a = 5$ cm. Berechnen Sie die Seitenlängen b und c.
Es gilt $\sin 30° = \frac{5}{c}$ und daher $c = \frac{5}{\sin 30°} = \frac{5}{0{,}5} = 10$ cm,
sowie $\cos 30° = \frac{b}{10}$ also $b = 10\cos 30° \approx 8,66$ cm.

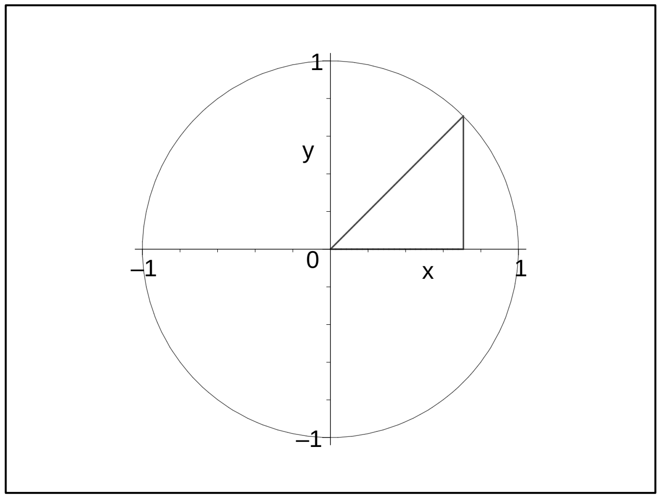
Auch im allgemeinen Dreieck (d.h. in einem Dreieck, das in aller Regel keinen rechten Winkel besitzt) können der Sinus und der Kosinus zur Bestimmung von Seitenlängen verwendet werden. Dazu ist meist der Sinussatz oder der Kosinussatz heranzuziehen.

Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$
Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
(Beachte: Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ergibt sich der *Satz des Pythagoras:* $c^2 = a^2 + b^2$)

8.2. Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Die im letzten Abschnitt beschriebene Vorgehensweise besitzt den Nachteil, dass sie nur für Winkel zwischen 0° und 90° eine Definition des Sinus und des Kosinus zulässt. Durch Betrachtung der Punkte auf dem Einheitskreis - dem Kreis um $O(0|0)$ mit Radius 1 - kann diesem Mangel abgeholfen werden.

Betrachtet man den Winkel α der von der x-Achse und dem Schenkel OP eingeschlossen wird, so erkennt man, dass α durch den Schnittpunkt P des Schenkels OP mit dem Einheitskreis eindeutig bestimmt wird. Deshalb kann man jedem Winkel α auch eindeutig die x- und y-Koordinate des Punktes P zuordnen.
Man definiert nun den Kosinus des Winkels α als x-Koordinate des Punktes P und den Sinus des Winkels α als y-Koordinate von P: $P(\cos\alpha|\sin\alpha)$.



Bemerkung: Mit Hilfe der Strahlensätze lässt sich zeigen, dass diese Definition des Sinus und des Kosinus für Winkel zwischen 0° und 90° die selben Werte liefert, wie das Vorgehen in 8.1.

Einige einfache Werte sind:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1

Lässt man darüber hinaus auch Drehungen um mehr als den Vollkreis bzw. im Uhrzeigersinn zu, so erhält man für alle Winkel eine eindeutige Definition des Sinus und des Kosinus.

Die sin- und cos-Werte für Winkel größer als 90^0 kann man in einfacher Weise aus denen für Winkel zwischen 0^0 und 90^0 gewinnen: Will man z. B. $\sin 120^0$ bestimmen, so erkennt man, dass $\sin 120^0 = \sin 60^0$ ist, denn der sin-Wert ist ja die y-Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis. Für $\alpha = 120^0$ und $\alpha = 60^0$ hat P jedoch denselben y-Wert.
Entsprechend gilt: $\cos 120^0 = -\cos 60^0$.

8.3. Das Bogenmaß

Während die von uns bisher betrachteten Funktionen allesamt reelle Funktionen (also Funktionen mit $D \subseteq \mathbb{R}$) waren, wurde bei der Einführung des Sinus und des Kosinus Winkelgraden (Grad) reelle Zahlen zugeordnet. Um später die trigonometrischen Funktionen als reelle Funktionen definieren zu können, müssen wir daher zunächst klären, wie man die Größe eines Winkels durch eine reelle Zahl ausdrücken kann. Dazu dient das sogenannte **Bogenmaß**.
Da man jedem Winkel α eindeutig den Punkt $P(\cos\alpha|\sin\alpha)$ zuordnen kann, ist α auch durch die auf dem Einheitskreis vom Punkt $A(1|0)$ zu P entgegen dem Uhrzeigersinn zurückgelegte Strecke eindeutig festgelegt. Man nennt diese Strecke **Bogenlänge** und bezeichnet sie üblicherweise mit x.
Zwischen dem Winkel α und der zugehörigen Bogenlänge x besteht folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^0}}$$

In Worten: Die Bogenlänge x verhält sich zum Gesamtumfang $u = 2\pi$ des Einheitskreises wie der Winkel α zum Vollwinkel 360^0.

So gehört zum Beispiel zum Winkel $\alpha = 90^0$ das Bogenmaß $x = \frac{\pi}{2}$, das dem Umfang des Viertel-Einheitskreises entspricht.

Folgende Tabelle enthält das zu einem Winkel α gehörende Bogenmaß x, sowie den sin- und cos-Wert:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	180^0	270^0	360^0
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\,\pi$	π	$3/2\,\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1

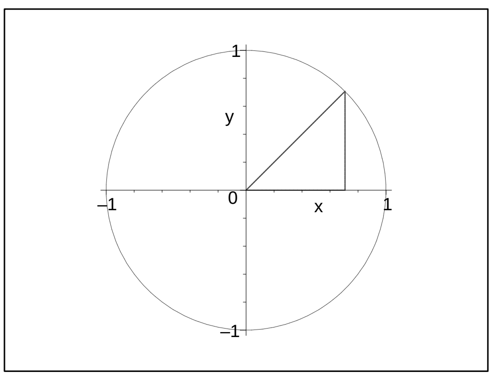
<u>**Beachte:**</u> Beim Taschenrechner kann man mit Hilfe der Taste $\boxed{\text{MODE}}$ (oder $\boxed{\text{DRG}}$) zwischen dem Gradmaß ($\boxed{\text{DEG}}$ im Display) und dem Bogenmaß ($\boxed{\text{RAD}}$) umschalten.

8.4. Rechenregeln für Sinus und Kosinus

Unabhängig von der Bogenlänge x (oder dem Winkel α) gilt stets die folgende wichtige Beziehung:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Begründung am Einheitskreis:



Zu beachten ist ferner, dass die Summe der Sinuswerte (bzw. Kosinuswerte) zweier Bogenlängen (resp. Winkel) **nicht** dem Sinuswert (bzw. Kosinuswert) der Summe der beiden Bogenlängen (resp. Winkel) entspricht. Stattdessen gelten die sogenannten **Additionstheoreme**:

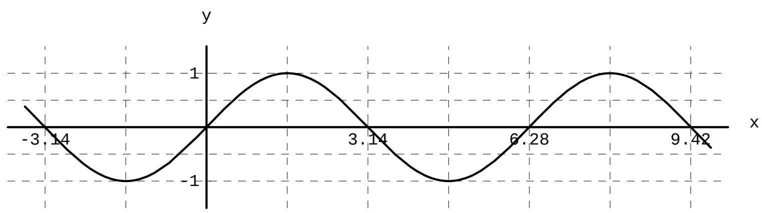
$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \qquad \text{bzw.}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

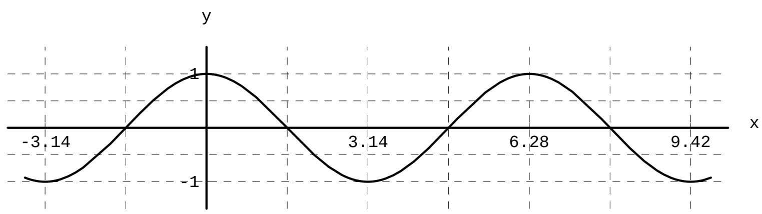
8.5. Die Sinus- und die Kosinus-Funktion

Ordnet man jeder Bogenlänge $x \in \mathbb{R}$ den zugehörigen Sinus- bzw. Kosinuswert zu, ergeben sich die Sinusfunktion $\quad \sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \quad x \longrightarrow \sin x \quad$ und
die Kosinusfunktion $\quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \quad x \longrightarrow \cos x$.
Als Schaubilder erhält man

Sinusfunktion



Kosinusfunktion



<u>Eigenschaften:</u>

1. Da die Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen können, liegen die Funktionswerte der sin- und cos-Funktion zwischen -1 und 1, d. h. der Wertebereich der Funktionen ist $W = [-1, 1]$.

2. Da sich der Punkt P nach einer vollen Kreisdrehung (d. h. nach $x = 2\pi$) wieder am Ausgangspunkt $(1|0)$ befindet, wiederholen sich die sin- und cos-Werte in einem Abstand von 2π. Man sagt die sin- und cos-Funktionen sind periodische Funktionen mit der **Periode** 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad ; \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \;.$$

3. Zwischen der sin- und cos-Funktion besteht folgender Zusammenhang:
Das Schaubild der cos-Funktion entsteht durch Verschieben des Schaubildes der sin-Funktion entlang der x-Achse um $\pi/2$ nach links, d. h. :

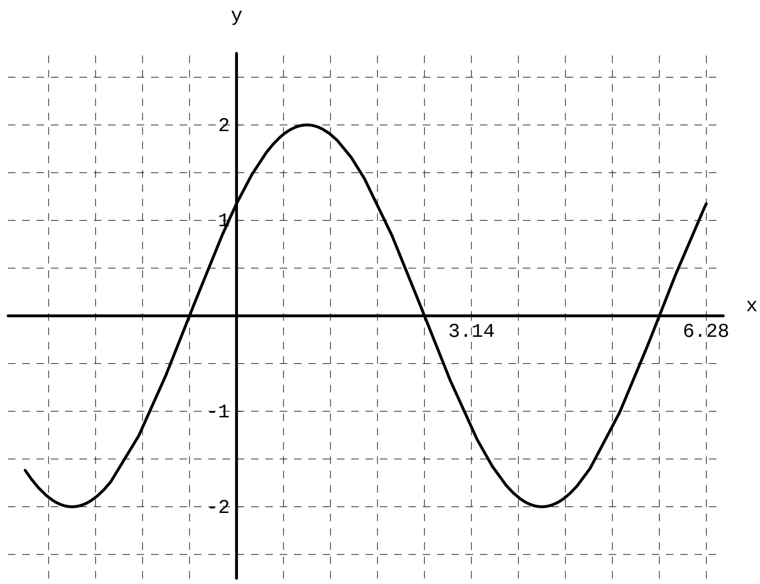
$$\cos x \;=\; \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \sin x \;=\; \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \;.$$

4. Die Sinus- und Kosinusfunktionen sind keine linearen Funktionen (d.h. es gilt **nicht** $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ bzw. $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$). Stattdessen gelten die früher behandelten **Additionstheoreme.**

8.6. Die allgemeine Sinusfunktion

Unter einer allgemeinen Sinusfunktion versteht man eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$.
Dabei bezeichnet d den mittleren Funktionswert der Funktion, a (Amplitude) die maximale Abweichung von diesem Mittelwert und c den Beginn der „ersten“ Periode. Die Periodenlänge p ergibt sich aus der Beziehung $p = \frac{2\pi}{b}$. Ähnlich wie in Abschnitt 3.3 dieses Kapitels gewinnt man das Schaubild einer allgemeinen Sinusfunktion durch Strecken, Stauchen und Verschieben des Schaubildes der Sinusfunktion sin.

Beispiel: Die Funktion f mit $f(x) = 2\,\sin(x + \frac{\pi}{5})$

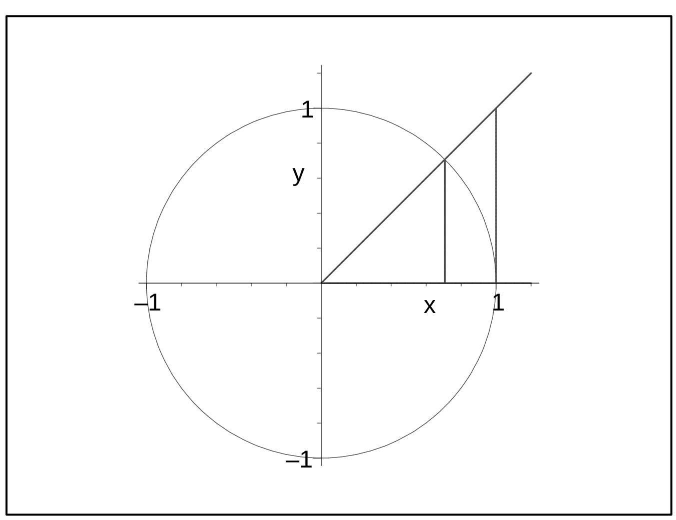


8.7. Die Tangensfunktion

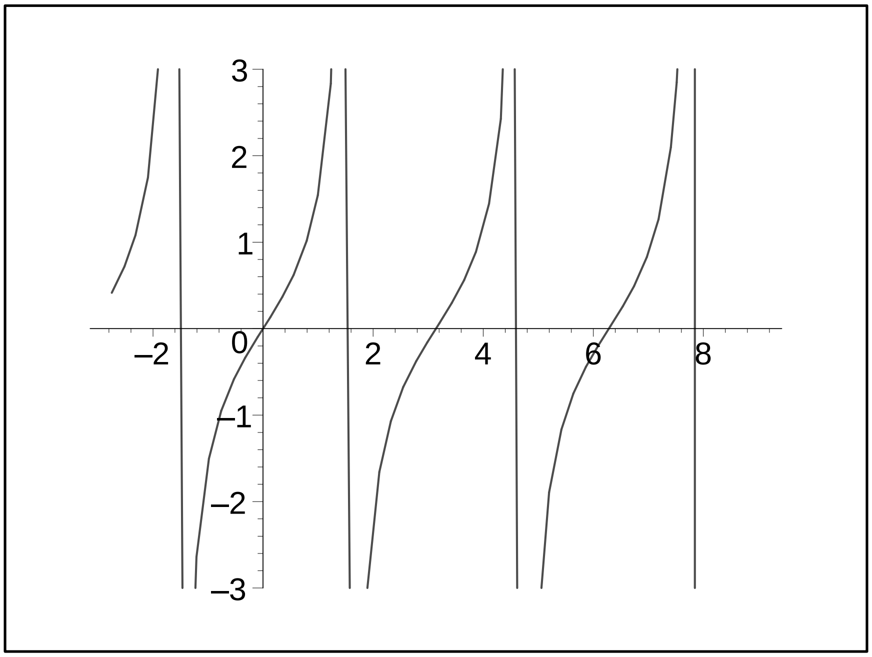
In der Mittelstufe wird der Tangens als Quotient aus Sinus und Kosinus (oder als Quotient aus Gegenkathete und Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck) definiert:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

Mit Hilfe der Strahlensätze lässt sich der Tangens auch am Einheitskreis veranschaulichen:



Entsprechend wird die Tangensfunktion tan durch die Zuordnung $x \longrightarrow \tan x$ definiert. Ihr Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ihr Wertebereich $W = \mathbb{R}$.
Das Schaubild der Tangensfunktion sieht folgendermaßen aus.



VI. Folgen und Reihen

1. Definition und Darstellungsarten

1.1. Folgen

Definition: Eine Zuordnung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$) eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt reelle **Zahlenfolge**.

Bezeichnungen: $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots)$

a_n ... n-tes Folgenglied

n ... Index

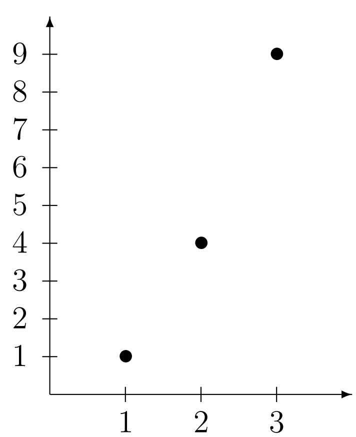
Folgen lassen sich auf verschiedene Weise beschreiben. Wir erläutern die Möglichkeiten an einem

Beispiel:

- verbale Beschreibung: Jeder natürlichen Zahl wird ihre Quadratzahl zugeordnet.
- Zuordnungsvorschrift: (explizite Darstellung) $n \to a_n = n^2 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$
  kurz: $(a_n) = (n^2)$
- Wertetabelle:

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1	4	9	16	25	...

- aufzählende Darstellung: $(a_n) = (1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; \ldots)$
- graphische Darstellung:



In obigem Beispiel wurde das n-te Folgenglied durch einen Term beschrieben, in dem der Index n auftritt.
Vereinfacht ausgedrückt sind wir hier wie bei reellen Funktionen vorgegangen: Die abhängige Variable a_n (bei reellen Funktionen y) wurde mit Hilfe der unabhängigen Variable n (bei reellen Funktionen x) dargestellt.
Anders als bei reellen Funktionen können Folgen jedoch auch durch **Rekursion** (Bezugnahme auf vorangehende Folgeglieder) definiert werden:

Beispiel: (Fibonacci-Folge)
Die Fibonacci-Folge wird rekursiv durch die Festlegungen

$$a_1 = 1 \;,\; a_2 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

definiert. Daraus lassen sich sämtliche Folgeglieder berechnen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

In aufzählender Darstellung ergibt sich also $\quad (a_n) = (1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots)$

1.2. Reihen

Definition: Summiert man jeweils die ersten n-Folgeglieder einer reellen Zahlenfolge (a_n) und bezeichnet man diese Summe mit $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, so erhält man eine neue Folge, die **(unendliche) Reihe** $(s_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.
Dabei wird s_n als n-te Teilsumme bezeichnet.

Beispiel: Die Reihe (s_n) zur Folge $(a_n) = (n^2)$ erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 4 = 5 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 4 + 9 = 14 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \end{aligned}$$

In aufzählender Darstellung ergibt sich $(s_n) = (1; 5; 14; 30; 55; \ldots)$

<u>**Beachte:**</u> Reihen sind Folgen, die auf eine besondere Art gebildet wurden.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die im Beispiel behandelte Reihe (s_n) die explizite Darstellung $(s_n) = (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$ besitzt.

Zur Ersparnis von Schreibarbeit vereinbart man für Summen die folgende Schreibweise

$$\sum_{k=l}^{m} a_k \quad = \quad a_l + a_{l+1} + a_{l+2} + \ldots + a_{m-1} + a_m \qquad (\text{wo } l, m \in \mathbb{N} \text{ und } l \leq m)$$

Dabei bezeichnet man Σ (großes Sigma) als *Summenzeichen* und k als *Summationsindex*. Der Wert l entspricht dem Index des ersten Summanden, m dem Index des letzten Summanden.

Beispiel: Für die oben eingeführte Reihe (s_n) gilt

$$\begin{aligned} s_1 &= \textstyle\sum_{k=1}^{1} \; a_k = \sum_{k=1}^{1} \; k^2 \\ s_2 &= \textstyle\sum_{k=1}^{2} \; a_k = \sum_{k=1}^{2} \; k^2 \\ s_3 &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \; a_k = \sum_{k=1}^{3} \; k^2 \\ s_4 &= \textstyle\sum_{k=1}^{4} \; a_k = \sum_{k=1}^{4} \; k^2 \end{aligned}$$

also allgemein $\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \; a_k = \sum_{k=1}^{n} \; k^2$.

2. Spezielle Folgen

2.1. Arithmetische Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen

Beispiel: Oma Maier legt zur Geburt ihrer Enkelin 1000 DM in einen Sparstrumpf. Jedes Jahr zum Geburtstag legt sie 50 DM dazu. Wieviel bekommt die Enkelin an ihrem 18. Geburtstag ausbezahlt?

Jahr	0	1	2	3	...
Summe	1000	1050	1100	1150	...

$$a_{n+1} = a_n + 50 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{n+1} - a_n = 50$$

$$a_{18} = 1000 \text{ DM} + 18 \cdot 50 \text{ DM} = 1900 \text{ DM}$$

Sie bekommt also 1900 DM.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **arithmetische Folge**, wenn die Differenz d zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, also für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_{n+1} - a_n = d$ gilt.

Der Name „arithmetische Folge“ kommt daher, dass jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn ist:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= a_n - a_{n-1} \quad (= d) && \mid + a_n + a_{n-1} \\
a_{n+1} + a_{n-1} &= 2\, a_n && \mid : 2 \\
\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} &= a_n
\end{aligned}$$

Satz: Kennt man bei einer arithmetischen Folge die Differenz d und das erste Folgeglied a_1, so kann man jedes beliebige Folgenglied direkt aus diesen Angaben berechnen. Für das n-te Folgenglied a_n gilt dabei $\qquad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$

Beispiel: $a_1 = 7, \quad d = 1,5$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 7 + 1,5 \cdot (n-1) = 1,5 \cdot n + 5,5$$
$$(a_n) = (1,5 \cdot n + 5,5) = (7;\ 8,5;\ 10;\ 11,5;\ 13; \ldots)$$

Arithmetische Reihen

Definition: Unter einer **arithmetischen Reihe** versteht man eine Reihe, die aus einer arithmetischen Folge gebildet wurde.

Beispiel: Die Reihe $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} k)$, die jeder natürlichen Zahl n die Summe der Zahlen von 1 bis n zuordnet, ist eine arithmetische Reihe. Sie lässt sich aus der arithmetischen Folge $(a_n) = (n)$ mit $a_1 = 1, d = 1$ gewinnen.

Auch bei arithmetischen Reihen lässt sich eine Darstellung angeben, in der man durch Einsetzen des Indexes n sofort die n-te Teilsumme s_n erhält.

Beispiel: Bei der Bestimmung einer nur von n abhängenden Darstellung der Reihe $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} k)$ wendet man folgenden Trick an:
Wir schreiben die Teilsumme s_n zweimal in verschiedener Reihenfolge auf:

$$\begin{array}{rcccccccccccl} s_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & & \\ s_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 1 & & \\ \hline 2 \cdot s_n & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & = & (n+1) \cdot n \end{array}$$

Daraus ergibt sich $\qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Insbesondere erhält man beispielsweise als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 den Wert $\qquad s_{100} = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$

Ein entsprechendes Vorgehen liefert allgemein den folgenden

Satz: Die Summe der ersten n Folgenglieder einer arithmetischen Folge ist das n-fache des arithmetischen Mittels aus dem ersten und letzten Summanden:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Beispiel: Die Summe aller geraden Zahlen bis zum Wert $2n$ ergibt sich aus

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k = n \cdot \frac{2 + 2n}{2} = n \cdot (n+1)$$

Insbesondere ist die Summe aller geraden Zahlen bis 100:

$$s_{50} = 50 \cdot 51 = 2550$$

2.2. Geometrische Folgen und Reihen

Geometrische Folgen

Beispiel: Ein Frosch springt über eine Straße. Beim ersten Sprung springt er 1 m. Dabei ermüdet er, so dass er bei jedem folgenden Sprung nur noch 2/3 des vorigen Sprungs erreicht.

Sprung	1	2	3	4	...
Weite in m	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$	...
a_n	a_1	$a_2 = \frac{2}{3} \cdot a_1$	$a_3 = \frac{2}{3} \cdot a_2$	$a_4 = \frac{2}{3} \cdot a_3$	...

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} \quad (\text{für } a_n \neq 0)$$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **geometrische Folge**, wenn der Quotient q zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant (aber $\neq 1$) ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann die Beziehung $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1.$

Der Name „geometrische Folge“ kommt daher, dass der Betrag jedes Folgengliedes (für $n \geq 2$) das geometrische Mittel der beiden Nachbarn ist:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (= q) && \mid \cdot a_n \cdot a_{n-1} \\
a_{n+1} \cdot a_{n-1} &= a_n^2 && \mid \sqrt{} \\
|a_n| &= \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}
\end{aligned}$$

Satz: Kennt man bei einer geometrischen Folge das Anfangsglied a_1 und den Quotienten q, so kann man jedes beliebige Folgenglied direkt aus diesen Angaben berechnen. Für das n-te Folgenglied a_n gilt dabei $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Beispiel: $a_1 = 4, \quad q = 1,5$

$a_n = 4 \cdot 1,5^{n-1}$

$(a_n) = (\,4;\ 6;\ 9;\ 13,5;\ 20,25;\ 30,375; \ldots)$

Anwendung:

Oma Müller legt zur Geburt ihres Enkels 1000 DM auf einem Sparbuch mit 5% Zinsen an. Sonst zahlt sie nichts mehr ein. Wieviel Geld bekommt der Enkel an seinem 18. Geburtstag?

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1000 + \tfrac{5}{100} \cdot 1000 = \left(1 + \tfrac{5}{100}\right) \cdot 1000 = 1050 \\
a_2 &= 1050 + \tfrac{5}{100} \cdot 1050 = \left(1 + \tfrac{5}{100}\right) \cdot 1050 = \left(1 + \tfrac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right) \cdot 1000 \\
& \qquad = \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^2 \cdot 1000 \\
&\vdots \\
a_n &= \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^n \cdot 1000 \\
a_{18} &= \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^{18} \cdot 1000 = 2406,62
\end{aligned}$$

Der Enkel bekommt 2406,62 DM.

Allgemein:
Ein Kapital der Höhe K_0 wird jährlich mit $p\%$ verzinst, die Zinsen werden wieder weiterverzinst. Dann beträgt der Kontostand nach n Jahren $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ (vgl. V.6).

Geometrische Reihen

Definition: Unter einer **geometrischen Reihe** versteht man eine Reihe, die aus einer geometrischen Folge gebildet wurde.

Beispiel: Die Reihe $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k) = (\sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{3})^{k-1})$, die jeder natürlichen Zahl n den gesamten im Froschbeispiel nach n Sprüngen zurückgelegten Weg zuordnet, ist eine geometrische Reihe.

Satz: Bei geometrischen Reihen lässt sich die n-te Teilsumme s_n mit Hilfe der folgenden Formel berechnen:

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} \;=\; a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1$$

Beispiel: Im Froschbeispiel hat der Frosch nach 6 Sprüngen die Strecke

$$s_6 = \sum_{k=1}^{6} (\frac{2}{3})^{k-1} = \frac{(\frac{2}{3})^6 - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{665}{243} \approx 2,74$$

zurückgelegt.

3. Eigenschaften von Folgen

3.1 Monotonie

Definition: Eine Folge (a_n) heißt

monoton wachsend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_n \leq a_{n+1}$ gilt.
streng monoton wachsend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_n < a_{n+1}$ gilt.
monoton fallend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_n \geq a_{n+1}$ gilt.
streng monoton fallend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_n > a_{n+1}$ gilt.

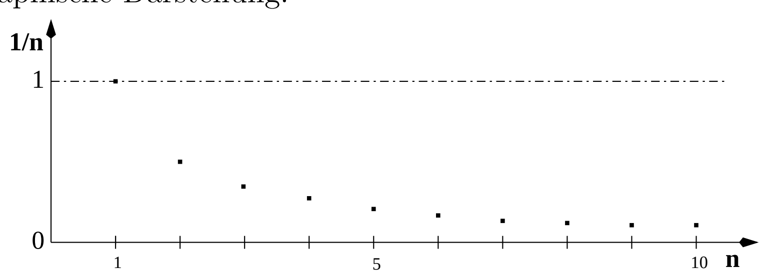
Beispiele:

a) Im Froschbeispiel ist jedes Folgenglied kleiner als das vorige. Diese Folge ist also streng monoton fallend.

b) Die Kontostände bei Oma Müller und Oma Maier nehmen jedes Jahr zu. Die dazugehörige Folgen sind daher streng monoton wachsend.

c) $n \to \frac{1}{n}$; $(a_n) \;=\; (\frac{1}{n}) \;=\; (1;\; \frac{1}{2};\; \frac{1}{3}\;;\; \frac{1}{4}\;;\; \frac{1}{5}\;;\; \ldots)$

Graphische Darstellung:



Vermutung: Die Folge (a_n) ist streng monoton fallend.

Beweis:

$$\begin{aligned} n &< n+1 && \mid : n(>0) \\ 1 &< \frac{n+1}{n} && \mid : (n+1)(>0) \\ \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n} && \text{, also } a_{n+1} < a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

Bemerkung: Bei Folgen muss keine Monotonie vorliegen. So ist beispielsweise die Folge $(a_n) = ((-1)^n)$ weder monoton steigend, noch monoton fallend.

3.2. Beschränktheit

Definition: Eine Folge (a_n) heißt

- **nach oben beschränkt**, wenn es einen bestimmten Wert S_o (obere Schranke) gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq S_o$ gilt.
- **nach unten beschränkt**, wenn es einen bestimmten Wert S_u (untere Schranke) gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \geq S_u$ gilt.
- **beschränkt**, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Beispiele: a) $n \longrightarrow \frac{1}{n}$; $(a_n) = (\frac{1}{n}) = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \cdots)$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 = \frac{0}{n} \leq \frac{1}{n} = a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n} = 1$

Die Folge $(\frac{1}{n})$ besitzt daher die obere Schranke $S_o = 1$ und die untere Schranke $S_u = 0$. Mithin ist $(\frac{1}{n})$ beschränkt.

b) $n \longrightarrow n+1$; $(a_n) = (n+1) = (2; 3; 4; 5; \cdots)$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \leq n+1$

Die Folge $(n+1)$ besitzt daher die untere Schranke $S_u = 1$ und ist insbesondere nach unten beschränkt

(**<u>Beachte:</u>** „Die“ untere Schranke einer Folge ist **nicht** eindeutig bestimmt. Im Beispiel hätte man genauso gut $S_u = 2$ oder $S_u = -55$ wählen können).

c) Jede monoton wachsende Folge (a_n) ist nach unten beschränkt. Sie besitzt die untere Schranke a_1.

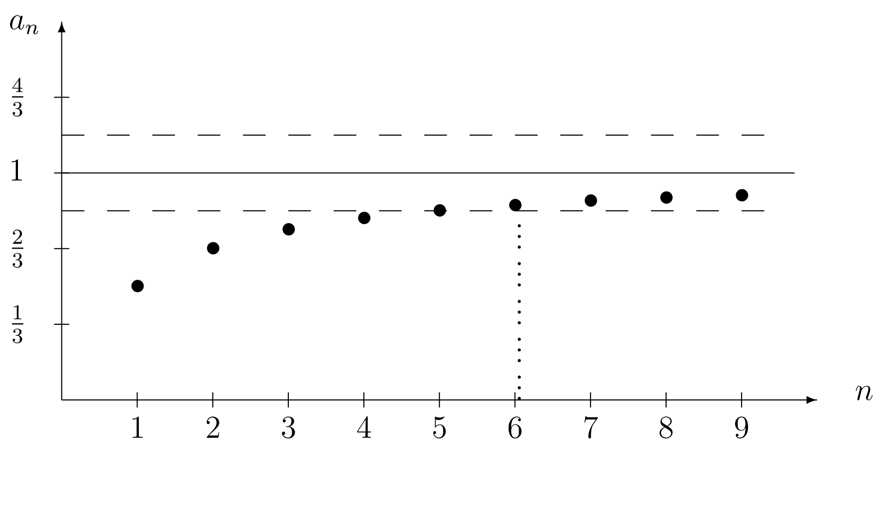
Bemerkung: Bei Folgen muss keine Beschränktheit vorliegen. So ist etwa die Folge $(a_n) = ((-1)^n \cdot n^2)$ weder nach oben, noch nach unten beschränkt.

3.3. Konvergenz und Divergenz

Wir betrachten zunächst das folgende

Beispiel: $n \to \frac{n}{n+1}$; $(a_n) = (\frac{n}{n+1}) = (\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots)$

Diese Folge nähert sich der Zahl 1 immer mehr an.
Graphische Darstellung:



Definition: Eine Zahl g heißt **Grenzwert** der Zahlenfolge (a_n) genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

Besitzt eine Zahlenfolge einen Grenzwert g, so sagt man auch, die Folge **konvergiert** gegen den Grenzwert g.

In Worten: Zu jeder (noch so kleinen) Zahl ε gibt es einen Index n_0, so dass alle Folgenglieder der Folge mit einem Index $n \geq n_0$ von dem Grenzwert g einen kleineren Abstand als ε haben. Man sagt auch: Nur endlich viele Folgenglieder liegen außerhalb des „ε-Schlauchs" um g.

Bemerkung: Je kleiner man ε wählt, umso größer ist i.A. n_0 zu wählen, d.h. umso mehr Folgenglieder liegen außerhalb des ε-Schlauchs.
Wichtig ist nur: Ab einer Stelle liegen *alle* folgenden Glieder innerhalb des ε-Schlauchs.

In obigem Beispiel sieht man etwa, dass die Folge $(a_n) = (\frac{n}{n+1})$ gegen den Wert 1 konvergiert: Wählt man wie in der graphischen Darstellung $\varepsilon = \frac{1}{6}$, so liegen ab $n_0 = 6$ **alle** Folgenglieder innerhalb des „$\frac{1}{6}$-Schlauchs" um die Zahl 1. Außerhalb des „$\frac{1}{6}$-Schlauches" findet man nur endlich viele Folgeglieder, nämlich die Glieder a_1 bis a_5.
Entsprechend ist für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ die Wahl $n_0 = 1000$ zu treffen, damit alle nachfolgenden Glieder innerhalb des $\frac{1}{1000}$-Schlauches um die Zahl 1 liegen.

Bemerkung: Eine Folge muss **nicht** konvergieren. So konvergiert beispielsweise die Folge $((-1)^n)$ nicht.
Nicht-konvergente Zahlenfolgen heißen **divergent**.

Zur Klärung der Frage der Konvergenz einer Folge gehen wir wie in folgendem Beispiel vor:

Beispiel: $(a_n) = (\dfrac{n^2 - (-1)^n}{2n^2})$

1. Berechnung einiger Folgeglieder: $(a_n) = (1\ ;\ \frac{3}{8}\ ;\ \frac{5}{9}\ ;\ \frac{15}{32}\ ;\ \frac{26}{50}\ ;\ \ldots)$
2. Formulierung einer Vermutung: Der Grenzwert liegt bei $g = \frac{1}{2}$.
3. Untersuchung, ob die Differenzfolge $(a_n - g)$ eine Nullfolge (d.h. eine gegen Null konvergierende Folge) ist:

$$(a_n - g) = \left(\frac{n^2 - (-1)^n}{2n^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{n^2-(-1)^n}{2n^2}-\frac{1}{2}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{n^2-(-1)^n-n^2}{2n^2}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-(-1)^n}{2n^2}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{2n^2} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< 2n^2 \\
\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} &< n
\end{aligned}
$$

Folgerung: Wenn n_0 größer als $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ gewählt wird, befinden sich sämtliche Folgeglieder a_n mit $n \geq n_0$ im ε-Schlauch um den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$.

Damit gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-(-1)^n}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

Sätze über konvergente Zahlenfolgen:

- Eine Zahlenfolge kann **höchstens einen** Grenzwert haben.
- Jede monoton wachsende (bzw. fallende) und gleichzeitig beschränkte Folge ist konvergent. Der Grenzwert entspricht der kleinsten oberen (größten unteren) Schranke der Folge.
- Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt (wie das Beispiel $(a_n) = ((-1)^n)$ zeigt, gilt die Umkehrung i.A. nicht).
- Jede Teilfolge einer gegen den Grenzwert g konvergierenden Folge konvergiert ebenfalls gegen den Grenzwert g.

VII. Kurven und Gleichungen von Kegelschnitten

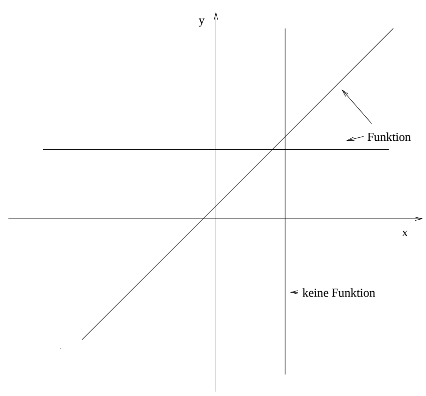
1. Einführung

1.1. Zielsetzung

In Kapitel V. haben wir gesehen, dass sich bestimmte Punktmengen/Kurven im kartesischen Koordinatensystem mit Hilfe von Funktionsgleichungen $y = f(x)$ beschreiben lassen. So konnte beispielsweise gezeigt werden, dass die Punkte einer jeden nicht zur y-Achse parallelen Gerade stets eine Gleichung der Form $y = mx + c$ erfüllen. In diesem Kapitel wollen wir diese Überlegungen wieder aufgreifen und versuchen die Punktmengen weiterer geometrischer Objekte durch Gleichungen mit 2 Variablen x und y auszudrücken.

1.2. Relationaler Zusammenhang

Einfache Beispiele zeigen dabei, dass die Gleichung eines geometrischen Objektes im Allgemeinen keine funktionale Beziehung zwischen den Variablen x und y darstellt:
So findet man zum Beispiel bei einem Kreis zwei Punkte mit gleichem x-Wert und bei einer Parallelen zur y-Achse sogar unendlich viele Punkte mit gleicher x-Koordinate. Da eine Funktion jedem x-Wert jedoch *genau einen* y-Wert zuordnet, können in diesen Fällen keine Funktionsgleichungen vorliegen. Die zu bestimmenden Gleichungen liefern daher lediglich eine **relationale Beziehung**.



2. Gleichungen zu geometrischen Objekten

2.1. Geraden

Die Gleichung einer Geraden haben wir im Wesentlichen schon in Kapitel V.2. behandelt. Problematisch waren hier lediglich Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen. Diese werden bei der Darstellung der Geradengleichung in der sogenannten **allgemeinen Form** berücksichtigt:

$$\boxed{\text{ax+by} = 1 \qquad \text{(allgemeine Form)}}$$

<u>Mögliche Fälle:</u>

1. Fall $a \neq 0, b \neq 0$: Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Umformung

$$\begin{aligned} ax + by &= 1 && \mid -ax \\ by &= 1 - ax && \mid : b \\ y &= \frac{1}{b} - \frac{a}{b}x \end{aligned}$$

und nach Umbenennung ($c = \frac{1}{b}, m = -\frac{a}{b}$)

$$y = mx + c \qquad \text{(Normalform)}$$

Es liegt also der „übliche“ Fall vor, in dem die beschriebene Gerade zu keiner der Koordinatenachsen parallel ist.

2. Fall $a = 0, b \neq 0$ Ein Vorgehen wie im ersten Fall liefert hier die Gleichung

$$y = c \qquad \text{(Normalform mit } m = 0\text{).}$$

Die Gerade besteht also aus allen Punkten, die den y-Wert c besitzen. Mithin ist die Gerade eine Parallele zur x-Achse.

3. Fall $a \neq 0, b = 0$ Dieser Fall erfasst die Geraden, die sich nicht in Normalform darstellen lassen. Für die allgemeine Form gilt hier

$$\begin{aligned} ax &= 1 \qquad\qquad | : a \\ x &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

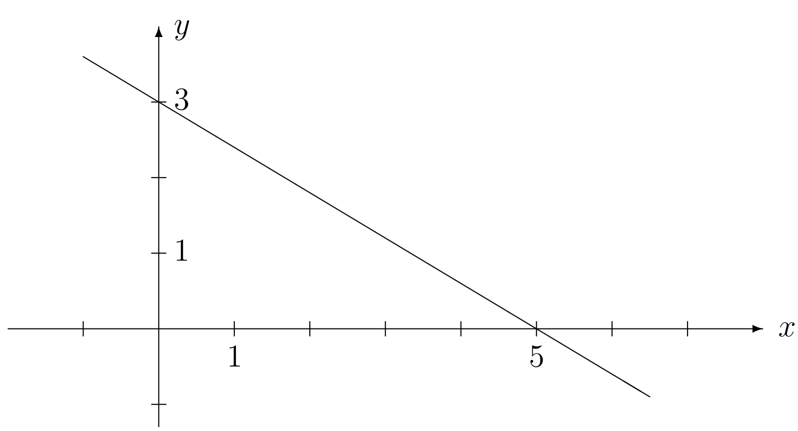
Die Gerade besteht also aus allen Punkten, die den x-Wert $\frac{1}{a}$ besitzen. Mithin ist die Gerade eine Parallele zur y-Achse.

Bemerkung: Im 1. Fall $a \neq 0, b \neq 0$ lässt sich die Gerade auch in der sogenannten **Achsenabschnittform**

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$$

angeben. Dieser Form kann man sofort die Schnittpunkte $S(0|d)$ und $T(c|0)$ der Geraden mit den Koordinatenachsen entnehmen.

Beispiel: Das Schaubild der Gleichung $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ ist:



2.2. Kreise

Benutzt man zum Zeichnen eines Kreises einen Zirkel, so stellt man an diesem zunächst einen bestimmten Abstand r (den Radius) ein, sticht in den Mittelpunkt M und zeichnet die Kreislinie.

> Der Kreis ist daher der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, die vom Mittelpunkt den Abstand r haben.

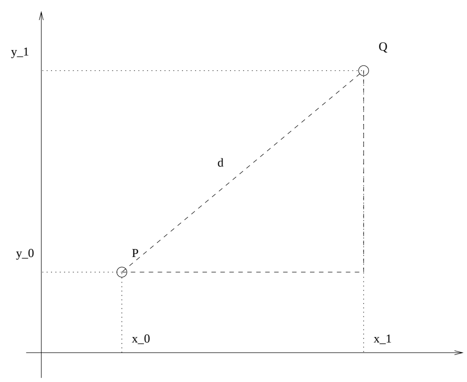
Da wir diesen Sachverhalt zur Bestimmung der Kreisgleichung nutzen wollen, müssen wir zunächst klären, wie man den Abstand zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem ausdrücken kann:

<u>Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem</u>

Satz: Für den Abstand d zweier beliebiger Punkte $P(x_0|y_0)$ und $Q(x_1|y_1)$ gilt

$$d \;= \overline{PQ} = \;\sqrt{(x_1 - x_0)^2 \;+\; (y_1 - y_0)^2}\;.$$

Beweis: Mit den in der Zeichnung eingeführten Bezeichnungen gilt für das rechtwinklige



Dreieck PRQ nach dem Satz des Pythagoras:

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

Die Abstandsformel ergibt sich nun durch beidseitiges Wurzelziehen. $\square$

Beispiel: Der Abstand der Punkte $P(0,5|1)$ und $Q(4,5|4)$ beträgt

$$d = \sqrt{(4,5 - 0,5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

<u>Kreisgleichungen</u>

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun auch die Kreisgleichung bestimmen. Wie wir oben festgestellt haben, besitzt jeder Punkt $P(x|y)$ auf dem Kreis um den Mittelpunkt $M(x_M|y_M)$ mit Radius r von M den Abstand r:

$$r = \overline{MP} = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$$

Quadriert man diese Gleichung, so erhält man

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \qquad \text{(Normalform)}}$$

Beispiele: a) Die Punkte $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

b) Die Punkte $P(x|y)$ auf dem Kreis um den Mittelpunkt $M(1|2)$ mit Radius 3 müssen die Gleichung $\qquad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \qquad$ erfüllen.

Der Punkt $Q(\frac{14}{5}|\frac{22}{5})$ liegt auf diesem Kreis, da

$$(\tfrac{14}{5}-1)^2+(\tfrac{22}{5}-2)^2=(\tfrac{9}{5})^2+(\tfrac{12}{5})^2=\tfrac{81}{25}+\tfrac{144}{25}=9 \qquad \text{ist.}$$

Der Punkt $R(2|5)$ liegt hingegen nicht auf diesem Kreis, da

$$(2-1)^2+(5-2)^2=1^2+3^2=10\neq 9 \qquad \text{ist.}$$

Der Normalform der Kreisgleichung kann man leicht den Mittelpunkt $M(x_M|y_M)$ und den Radius r entnehmen. Multipliziert man die Normalform aus und führt man die Umbenennungen $a=-2x_M, b=-2y_M$ und $c=x_M^2+y_M^2-r^2$ durch, erhält man die **allgemeine Form** der Kreisgleichung:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad \text{(allgemeine Form)}}$$

Von der allgemeinen Form zur Normalform

Hat man eine Kreisgleichung in der allgemeinen Form gegeben, so kann man Mittelpunkt und Radius des Kreises nicht so einfach ablesen.
Man muss dann durch **quadratische Ergänzung** die Normalform herstellen.

Beispiel:

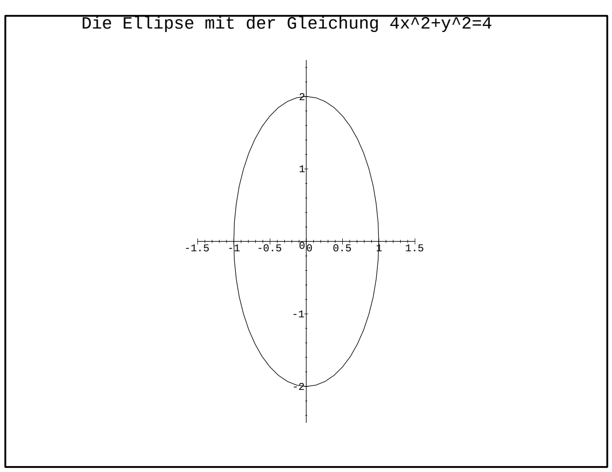
$$\begin{aligned}
x^2+2x+y^2-8y+8 &= 0\\
x^2+2x+(\mathbf{1-1})+y^2-8y+(\mathbf{16-16})+8 &= 0\\
\underbrace{(x^2+2x\ +1)}_{(x+1)^2}\ -1\ +\ \underbrace{(y^2-8y\ +16)}_{(y-4)^2}\ -16\ +8 &= 0\\
(x+1)^2\ +\ (y-4)^2\ -1-16+8 &= 0\\
(x+1)^2\ +\ (y-4)^2 &= 9
\end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt also den Kreis mit Mittelpunkt $M(-1|4)$ und Radius $r=3$.

2.3. Ellipsen

Ellipsen entstehen durch Strecken oder Stauchen eines Kreises in Richtung der Koordinatenachsen.

Beispiel: Streckt man etwa den Einheitskreis mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse, so erhält man folgende Ellipse:



Folgende Überlegung führt auf die Gleichung, die diese Ellipse beschreibt:
Teilt man die y-Werte aller Punkte, die auf der Ellipse liegen, (wieder) durch 2 und zeichnet diese Punkte in das Koordinatensystem ein, so erhält man den Einheitskreis.

Folglich erfüllen die Punkte der Ellipse die Gleichung $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

Entsprechendes ergibt sich, wenn man den Kreis in Richtung der x-Achse dehnt.

Beispiel: Wird der Einheitskreis in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 3 und zusätzlich noch in Richtung der x-Achse mit dem Faktor 5 gedehnt, so erhält man die Ellipse mit den **Halbachsenlängen** 3 und 5. Die Halbachsenlängen geben dabei den Abstand der Koordinatenschnittpunkte der Ellipse vom Ursprung an.

Die Gleichung, die diese Ellipse beschreibt, lautet dann $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$.

Dem Beispiel entnehmen wir, dass im Nenner der Summanden der Ellipsengleichung gerade die Halbachsenlängen der Ellipse stehen:

Jede (nicht verschobene und nicht gedrehte) Ellipse um den Ursprung mit den Halbachsenlängen a und b $(a, b > 0)$ lässt sich durch eine Gleichung der Form $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ beschreiben.

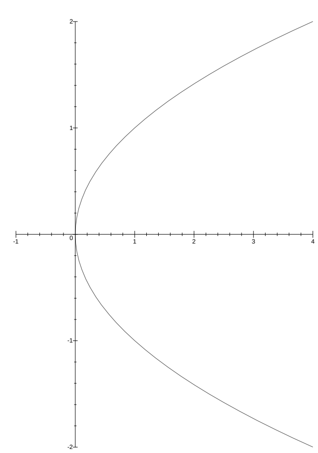
Anmerkung: Die Ellipse besitzt - ähnlich wie der Kreis - eine sie definierende Eigenschaft:

> Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, bei denen die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (Brennpunkten) immer gleich ist.

Diese Eigenschaft wird bei der sogenannten *„Gärtnerkonstruktion“* benutzt, mit der man ellipsenförmige Blumenbeete anlegen kann: Man nimmt ein Seil, schlägt zwei Pflöcke in den Boden und befestigt das Seil mit beiden Enden an den Pflöcken. Wenn man nun einmal um die Pföcke herumläuft und das Seil dabei stets gespannt hält, erhält man eine Ellipse.

2.4. Parabeln

Dreht man das Schaubild der Normalparabel mit Funktionsgleichung $y = x^2$ um 90^0 im Uhrzeigersinn, so erhält man folgende Kurve:



Statt das Schaubild um 90^0 zu drehen, hätte man es auch an der 1. Winkelhalbierenden spiegeln können. Dies entspricht dem Vertauschen der Variablen x und y in der Gleichung $y = x^2$. Das neue Schaubild wird somit durch die Gleichung $x = y^2$ beziehungsweise $x - y^2 = 0$ beschrieben.

2.5. Hyperbeln

Wie gesehen, beschreibt die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ eine Kurve in der Koordinatenebene - den Einheitskreis. Wir wollen nun klären, welche Kurve man erhält, wenn man in der Gleichung x^2 durch $-x^2$ oder y^2 durch $-y^2$ ersetzt.

Betrachten wir die Gleichung $-x^2 + y^2 = 1$.
Löst man die Gleichung nach y auf, so ergibt sich

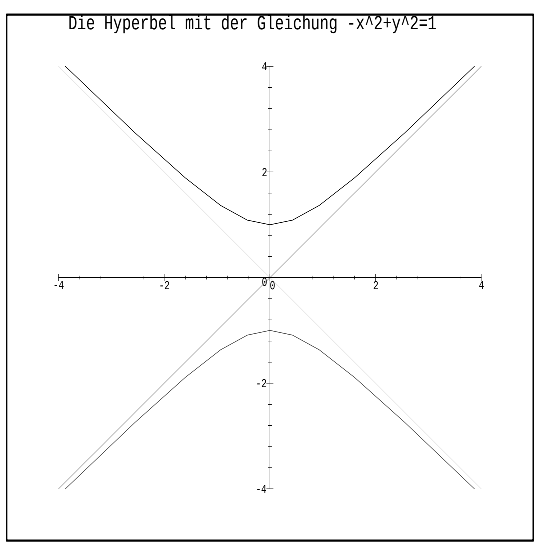
$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 &= 1 \qquad\qquad |+x^2 \\ y^2 &= x^2 + 1 \\ \Longrightarrow \qquad y &= \pm\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen einiger x-Werte erhält man folgende Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5
y	$\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{10}$	$\pm\sqrt{17}$	$\pm\sqrt{26}$

Schließlich kann man sich noch fragen, wie das Schaubild für sehr große Werte von x verläuft. Da sich die Wurzeln zweier sehr großer benachbarter Zahlen kaum unterscheiden (z.B. $\sqrt{10001} \approx \sqrt{10000}$), verhält sich das Schaubild für große x-Werte wie das Schaubild der Gleichungen $y = \pm\sqrt{x^2} = \pm x$. Mit anderen Worten: Die zwei Winkelhalbierenden $y = x$ und $y = -x$ sind Asymptoten der Kurve $-x^2 + y^2 = 1$.

Die Gleichung $-x^2 + y^2 = 1$ beschreibt somit eine Hyperbel:



Anmerkung: Das Schaubild der Hyperbel entsteht durch Drehung gegen den Uhrzeigersinn um 45^0 aus dem Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Entsprechend beschreibt die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ eine Hyperbel, die aus dem Schaubild der Gleichung $y = \dfrac{1}{x}$ durch Drehung um 45^0 im Uhrzeigersinn entsteht.

3. Zusammenfassung

Gleichungen der Form $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \;=\; 0,$ in denen die Variablen x und y höchstens quadratisch auftauchen, liefern (bis auf wenige „ausgeartete“ Ausnahmen) als Schaubilder in einem kartesischen Koordinatensystem die oben behandelten Kurven:

- eine Gerade (wenn keine quadratischen Glieder auftauchen)
- einen Kreis oder eine Ellipse
- eine Parabel
- eine Hyperbel

Man nennt solche Kurven **Kegelschnitte**, weil sie durch Schnitt eines Kegels beziehungsweise Doppelkegels mit einer Ebene entstehen.

Im Allgemeinen ist es schwierig herauszufinden, welcher Typ von Kegelschnitt vorliegt.
In einfachen Fällen hilft aber bereits quadratische Ergänzung:

Beispiel: An der Gleichung $x^2 - 2x - y^2 - 4y - 4 \;=\; 0$ kann man nach quadratischem Ergänzen den Typ erkennen:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x - (y^2 + 4y + 4) &= 0 \\
x^2 - 2x + (\mathbf{1} - \mathbf{1}) - (y^2 + 4y + 4) &= 0 \\
(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 1 &= 0 \\
(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 &= 0 \\
(x-1)^2 - (y+2)^2 &= 1
\end{aligned}$$

An den verschiedenen Vorzeichen vor den quadratischen Termen erkennt man, dass es sich um eine verschobene Hyperbel handelt.

Bemerkung: Die Hyperbel entsteht aus der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ durch Verschieben in x-Richtung um $+1$ und in y-Richtung um -2.