UNIVERSITÄT KLAGENFURT

THEMA:

Einführung in die Winkelfunktionen

Proseminar
Schulmathematik III
Dr. Ossimitz Günther
WS 2000/2001

Abgabetermin:
02.04.01

Markus Buchtele (9402140)
Marion Heit (9960145)
Angelika Rohrer (9960511)

PROSEMINARARBEIT

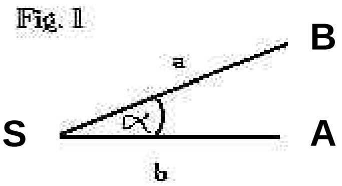
Einführung in die Winkelfunktionen

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung:

Damit wir das Thema vernünftig beginnen können, müssen wir noch ein paar Begriffe erklären.

✓ **Winkel:** Den Winkel können wir uns als Richtungsänderung vorstellen. Wenn wir in Figur 1 bei dem Punkt S stehen und Richtung A schauen und wir anschließend unseren Blick Richtung B schweifen lassen, so haben wir unsere Blickrichtung um den Winkel α [1]verändert.



✓ **Maßeinheit**

Es gibt verschiedene Winkelmaßeinheiten: z.B.: Altgrad, Neugrad, Bogenmaß,... Für dieses Kapitel ist vorerst nur das Altgrad notwendig:

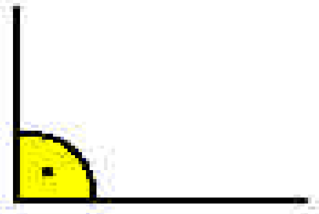
Altgrad: Dieses Maß stammt von den Babyloniern[2]. Sie konnten damals schon feststellen, daß die Drehung um die Sonne ungefähr 360 Tage beträgt. Außerdem haben sie damals schon erkannt, daß die Teilbarkeit der Zahl 60, und damit auch der Zahl 360 sehr gut ist. Deswegen sagten sie, daß die Drehung um die eigene Achse (entspricht einem Kreis) 360 Grad (°) betragen soll.

Gewisse Winkel haben nun bestimmte Namen bekommen, damit man besser über sie sprechen kann.

[1] Die Winkel werden allgemein mit Griechischen Buchstaben bezeichnet.
[2] Die Babylonier lebten vom 7 Jh. Bis zum 6 Jh. Vor Christi in Mesopotamien (heute ist dies ein Teil von Irak)

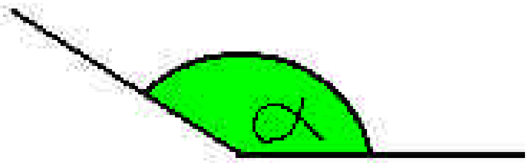
Jeder Winkel, der genau 90° hat, wird „rechter Winkel“ genannt.

Fig. 2



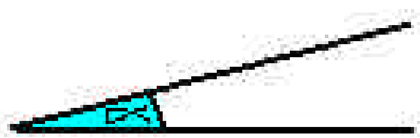
Jeder Winkel, der größer als 90° (rechter Winkel) ist, wird „stumpfer Winkel“ genannt.

Fig. 3



Jeder Winkel der kleiner als 90° (rechter Winkel) ist, wird „spitzer Winkel“ genannt.

Fig. 4



Bemerkung: In jedem Vier - und Vieleck beträgt die Summe der Winkel auch 360°, da man sich auch hier einmal um die eigene Achse drehen kann.

Anschaulich:

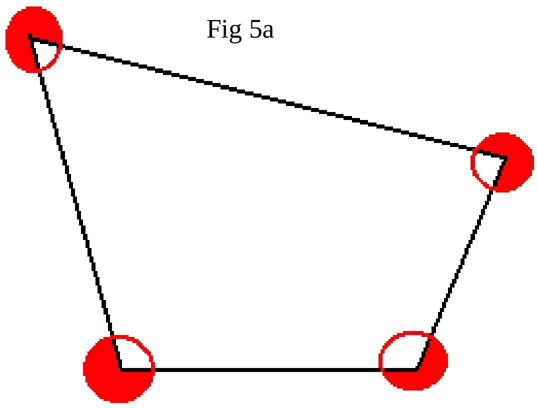
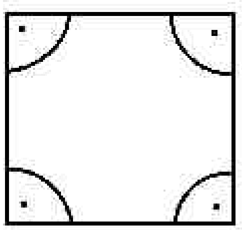


Fig 5a

Jeder Schüler soll nun ein beliebiges Viereck auf ein Blatt Papier zeichnen, und Kreise um die Ecken einzeichnen. Wenn die Schüler jetzt die äußeren Kreisteile ausschneiden, (in Figur 5a rot angemalt) und diese anschließend zusammenlegt, dann werden sie feststellen, daß man genau 3 Kreise zusammensetzten kann.
$\Rightarrow$ 4 Kreise hat man zuerst gezeichnet, dann hat man nur noch 3 Kreise, daraus folgt, daß man genau einen Kreis „verbraucht" hat. $\Rightarrow$ Die Summen der inneren Kreisteile sind **IMMER** so groß wie ein ganzer Kreis, daß entspricht 360°.

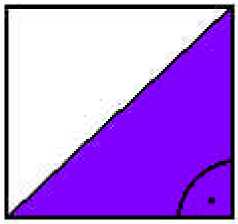
Natürlich gilt dies auch bei einem Quadrat (4*90° = 360°).

Fig. 5b



Im Dreieck jedoch (halbes Viereck) nur 180°.

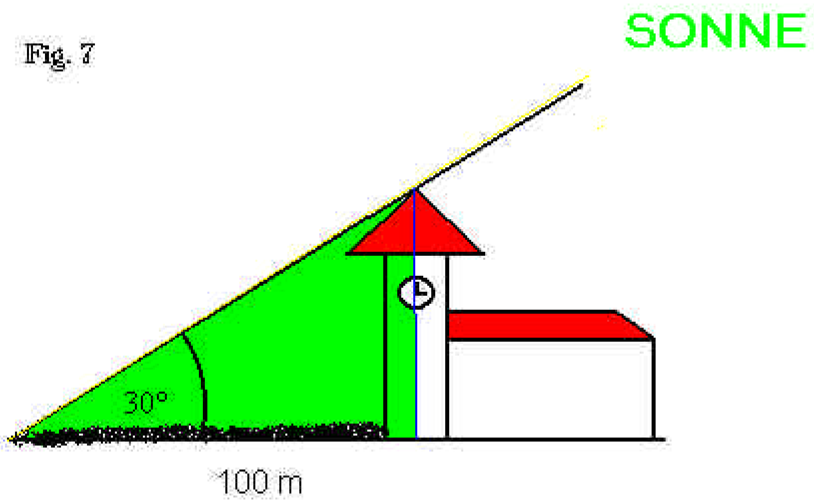
Fig. 6



2. Einführung:

Beispiel 1: Ein Kirchturm wirft mit 30 Grad einfallenden Sonnenstrahlen einen Schatten der Länge von 100m.
Frage: Wie hoch ist der Kirchturm? (Siehe Fig. 7)

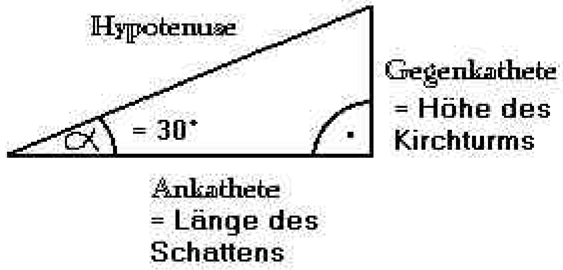
Fig. 7



Dieses Problem können wir mit den bisher bekannten Hilfsmitteln nicht lösen. Die Mathematik bietet hier Abhilfe. Dafür müssen wir zunächst das Problem auf ein rechtwinkeliges Dreieck zurückführen. (Siehe Fig. 7 grünes Feld).

Hier sehen wir allgemein (Fig. 8):

Fig. 8



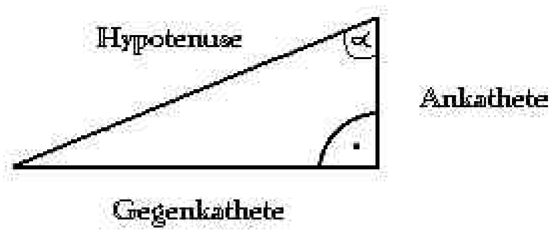
Die längste Seite im rechtwinkeligen Dreieck wird immer **Hypotenuse** genannt, und befindet sich immer gegenüber dem rechten Winkel.

Die beiden anderen Seiten werden **Katheten** genannt.

Vom Winkel a (siehe Fig. 8.) ausgehend, ist die gegenüberliegende Seite die **Gegenkathete,** und die am Winkel a anliegende Seite die **Ankathete.**

Welche Seiten sind nun An- und Gegenkathete, wenn wir den anderen nicht rechten Winkel betrachten?

Fig. 8 b



Nun betrachten wir uns die Fig. 7. mit dem Kirchturm nochmals genauer. Will man jetzt wissen, wie hoch der Kirchturm ist, gibt es eine Möglichkeit mit Hilfe des Winkels und der Länge einer Seite (In unserem Beispiel die Länge des Schattens bis zur Mitte des Kirchturmes, die man am Boden messen kann), die Länge der unbekannten Seite (Höhe des Kirchturmes) zu berechnen.

Der **Tangens** verschafft Abhilfe:
Der Tangens eines Winkels ist eine *Verhältniszahl*, die immer, für das gleiche Verhältnis zweier Längen im Dreieck, gleich groß ist.

Der **Tangens** a ist definiert durch: $\frac{Gegenkathete}{Ankathete}$

Kurz gesagt: $\tan a = \frac{G}{A}$

In unserem Beispiel geht es wie folgt:

$\tan a$ ist $\frac{Höhe}{Entfernung}$

Lösung:
Durch Umformung erhält man:

$\tan a$ *Entfernung =die Höhe

tan 30 Grad * 100m = 57,73 Meter.

Beispiel 2: Eine Dampflok führt seine Passagiere auf den Schneeberg. Auf der 5 km langen Strecke gewinnt der Zug 500 m Höhe.
Wie groß ist die Steigung a , die der Zug zu überwinden hat? (Siehe Fig. 9)

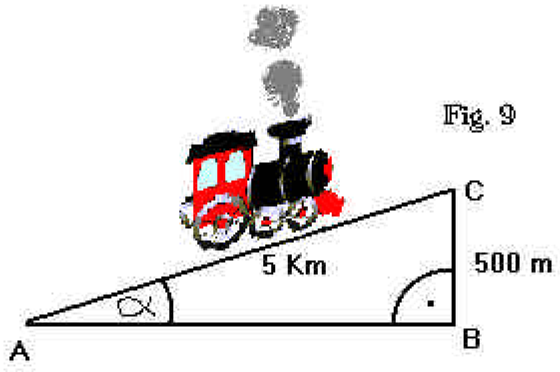


Fig. 9

Diese Beispiel kann man mit dem **Sinus** lösen:

Der **Sinus** a ist definiert durch: $\frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$

Kurz gesagt: sin $a = \frac{G}{H}$

In unserem Beispiel geht es wie folgt:

sin a ist $\frac{Höhengewinn}{Strecke}$

Durch Umformung erhält man:

sin $a = \frac{500}{5000}$

Das heißt, daß der Sinus von a 0,1 beträgt.
Wenn man den Winkel kennt und den Sinus des Winkels erhalten möchte, so verwendet man den Taschenrechner und könnte so eine Tabelle erstellen:

Winkel	Sinus des Winkels
0°	0
30	$\frac{1}{2}$
15	0,
10	0,17
5°	0,08

D.h.: der gesuchte Winkel muß ungefähr 5° betragen.

Umgekehrt also, wenn man den Sinus eines Winkels kennt und den Winkel wissen möchte, so kann man entweder probieren, oder man verwendet dafür den Taschenrechner, der dieses Problem wie folgt löst.

Um bei einem bestimmten (gegebenen) Winkel a zu bekommen, muß man je nach Taschenrechner dafür die Tasten inv sin oder 2^{nd} F sin oder arc sin oder $\sin^{-1}$ verwenden.

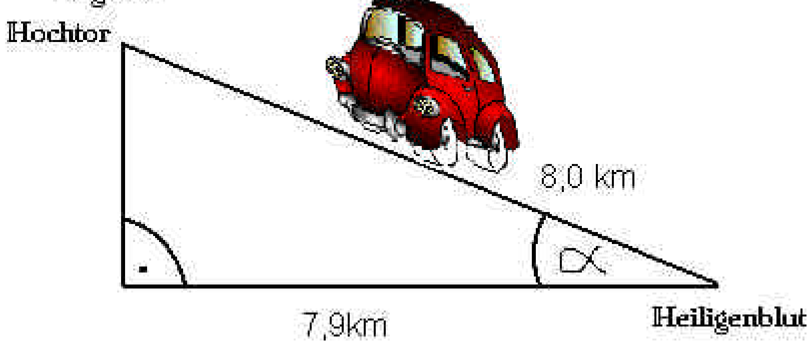
Lösung: a = 5,74 Grad

Beispiel 3: Die Großglockner-Hochalpenstraße ist von Heiligenblut bis zum Hochtor gemäß Kilometerzähler eines Fahrzeuges 8,0 km lang. Jemand mißt auf der Karte die horizontale Länge der Straße und erhält 7,9km. (siehe Fig. 10)

a.) Wie groß ist der mittlere Neigungswinkel der Straße gegenüber der Horizontalen, wenn man annimmt, daß die Straße eine gleichmäßige Steigung hat?

b.) Berechne den Höhenunterschied.

Fig. 10



Dieses Beispiel kann man mit dem **Cosinus** lösen:

Der **Cosinus** a ist definiert durch: $\frac{Ankathete}{Hypothenuse}$

Kurz gesagt: $\cos a = \frac{A}{H}$

In unserem Beispiel geht es wie folgt:

$\cos a$ ist $\frac{Horizontale}{Straße}$

Durch Umformung erhält man:

$\cos a = \frac{7{,}9}{8}$

Das heißt, daß der Cosinus von a 0,9875 beträgt. Um a zu bekommen, benötigen wir die Inverse von Cosinus; je nach Taschenrechner muß man dafür die Tasten inv cos oder 2^{nd} F cos oder arc cos oder $\cos^{-1}$ verwenden.

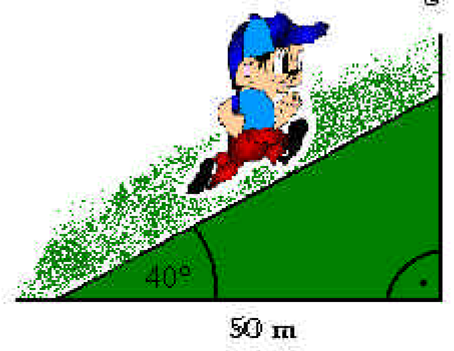
Lösung:	$\cos a = 0{,}9875$
	$a = 9{,}1$ Grad

Übungsbeispiele:

ÜB 1: Der kleine Klaus hat es sehr eilig nach Hause zu kommen. Deshalb biegt er 50 m vor einer Wegkreuzung unter 40 Grad ab und geht durch den Acker. (Siehe Fig.11).

a.) Wie lange ist der Weg auf dem Acker?
b.) Wie lange wäre der Weg der zweiten Strasse, den er sich durch den Abschneider erspart?
c.) Erspart er sich Zeit, wenn er mit 2/3 seiner Geschwindigkeit vorankommt als er auf der Strasse läuft?

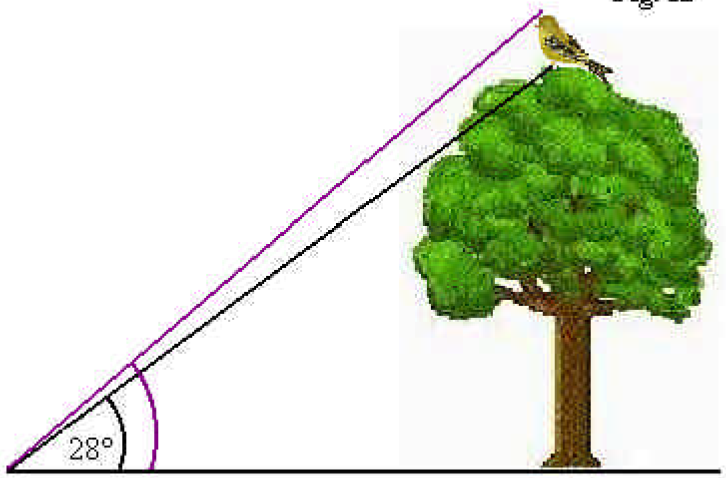
Fig. 11



ÜB 2: Ein Förster vermißt die Größe von Bäumen. Die Entfernung des Försters zum Baum beträgt 30 m. Sein am Boden stehendes Messgerät mißt 28 Grad zum Gipfel des Baumes. (Siehe Fig. 12)

a.) Wie hoch ist der Baum?
b.) Welchen Weg müßte ein 20 cm großer Vogel zurücklegen, wenn er vom Förster bis zur Baumspitze fliegt?
c.) Wie ändert sich der Winkel, wenn man bis zur Kopfspitze des Vogels mißt?

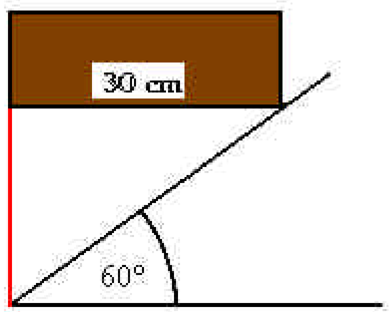
Fig. 12



ÜB 3: Um gut durch eine Tür zu gehen, sollte man sie zumindest 60 Grad öffnen können. Da wir einen sehr kleinen Raum haben, möchten wir einen Kasten mit 30 cm Tiefe möglichst nah an die Tür stellen. (Siehe Fig. 13)

a.) Wie nah kann ich unter diesen Voraussetzungen den Kasten stellen?

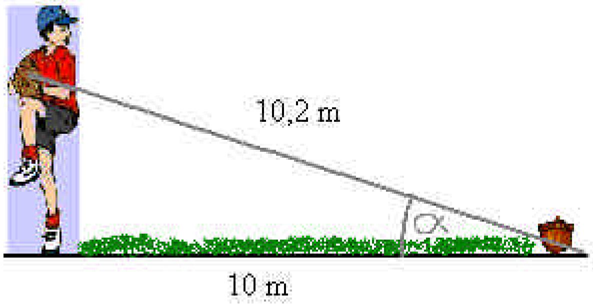
Fig. 13



ÜB 4: Ein Kind versucht mit einem Baseball in der Hand eine Nuß, die 10 m entfernt liegt zu treffen. Der Stein legt einen Weg von 10,2 m zurück. (Siehe Fig. 14)

a.) Wie groß ist der Aufprallwinkel, wenn man davon ausgeht, daß das Kind geradlinig wirft?

Fig. 14



3. Anhang

3.1. Lösungen zu den Übungsbeispielen:

Lösung zum Übungsbeispiel 1:

a.) Sin 40 = 50 Meter/ H
H= 77, 79 Meter

b.) tan 40 = G / 50
G= 41,96 Meter

c.) 77,79 Meter * 1,5 = 116,685 Meter
50 Meter + 41,96 Meter = 91,96 Meter
Herr Eilig Rastlos verliert einige Zeit.

Lösung zum Übungsbeispiel 2:

a.) tan 28 = Höhe / 30Meter
Höhe = 15,95 Meter
b.) cos 28 = 30 Meter / H
H = 33,98 Meter
c.) sin a = 16, 15 / 33.98
a = 28,38 Grad

Lösung zum Übungsbeispiel 3:

tan 30 = 30cm / A
A= 51,97cm

Bemerkung: Der Ergänzungswinkel von 60 Grad ist 30 Grad
(90 – 60 = 30)

Lösung zum Übungsbeispiel 4:

a.) tan a = 10 / 10,2
a = 44,43 Grad

3.2. Definitionen zu Begriffen, die sich mit dem Thema befassen:

Bemerkung:

Die unten angeführten Begriffe können bei dem besprochenen Thema Winkelfunktionen in irgendeiner Form auftreten. Diese Definitionen sollen den Lehrern als Information, genaue Erklärung und Ergänzung zum Sachverhalt dienen.

Definitionen

- ✓ **Abszisse**

  x-Koordinate = x-Wert; Der erste Koordinatenwert in einem Punkt wird oft als Abszisse bezeichnet. (siehe Koordinatensystem)

- ✓ **Definitions- und Wertebereich**

  Den Vorbereich einer Funktion f nennt man Definitionsbereich D, die Elemente aus D heißen **Argumente**. Ist (x ; y) ? f, so heißt die dem Argument x eindeutig zugeordnete zweite Koordinate y **Funktionswert** von x. Man schreibt y = f(x).
  Die Menge aller Funktionswerte heißt Wertebereich W der Funktion. Es ist W = {f(x) ? x ? D}.

- ✓ **Funktion**

  Wenn x und y zwei variable Größen sind und wenn sich einem gegebenen x-Wert genau ein y-Wert zuordnen läßt, dann nennt man y eine Funktion von x und schreibt: y = f(x).

- ✓ **Funktionsgleichung**

  Sei f: x ? f(x), x ? Definitionsbereich eine Funktion. Es ist
  (x ; y) ? f ? x ? Definitionsbereich und y = f(x)
  Da f(x) von x gemäß der Zuordnungsvorschrift x ? f(x) abhängt, heißen y **abhängige Variable** und x **unabhängige Variable**. Die Gleichung
  y = f(x) heißt Funktionsgleichung. Häufig wird eine Funktion durch eine Funktionsgleichung beschrieben.
  (siehe Variable)

- ✓ **Graph einer Funktion**

  Ikonische Darstellung einer Funktion.
  Oder: Der Graph spiegelt den Werteverlauf im Koordinaten – System wieder.
  (siehe Funktion und Koordinatensystem)

✓ **Grundrechnungsarten**

Addition: a (Summand) + b (Summand) = c (Summe)
Subtraktion: a (Minuend) - b (Subtrahend) = c (Differenzwert)
Multiplikation: a (Multiplikand/Faktor) * b (Multiplikator/Faktor) = c (Produktwert)
Division: a (Dividend) : b (Divisor) = c (Quotientenwert)

✓ **Hoch- und Tiefpunkte**

f: a ? $\Re$ M $\subseteq$ A
Die Stelle p ? M heißt Maximumstelle {Minimumstelle} von f in M, falls für alle x ? M gilt: f(x) <= f(p) {f(x) >= f(p)}.

✓ **Hypothenuse**

Die Seite die dem rechten Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck gegenüberliegt heißt Hypothenuse.

✓ **Kathete**

Die Schenkel des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck heißen Katheten.
(siehe Winkel und rechtwinkeliges Dreieck)

✓ **Koordinaten**

Zahlen, welche die geometrische Lage eines Punktes festlegen, heißen Koordinaten.

✓ **Kreis**

Ein Kreis ist in der Ebene, die Menge aller Punkte, die von einem Punkt M den konstanten Abstand r haben. Mittelpunkt M, Radius r

✓ **Länge einer Strecke**

In einem Raum wird die Länge der Strecke AB als Abstand der Endpunkte A, B eingeführt.
Oder: Die Länge einer Strecke ist eine Eigenschaft dieser Strecke. Mit Hilfe eines Stechzirkels oder Lineals kann man prüfen ob zwei Strecken die selbe Länge besitzen.

✓ **Negative Zahl**

Eine nichtkomplexe Zahl heißt negativ, wenn x < 0

✓ **Nullpunkt**

Der Punkt einer Zahlengeraden oder einer Skala, dem der wert 0 zugeordnet wird.

✓ **Ordinate**

Ist die Y Koordinate, ist die zweite Zahl im Koordinatensystem.
=abhängige.
(siehe Koordinaten und Koordinatensystem)

✓ **Parallel**

2 Geraden g und h heißen parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben, oder wenn sie zusammenfallen (identisch).

✓ p **- "Pi"**

Die Zahl PI ist eine reelle Zahl ~ 3,1415926535...
Man benötigt sie zum Beispiel zur Berechnung am Kreis: $U_{kreis} = 2r\,p$ **.**

✓ **Positive Zahl**

Eine nichtkomplexe Zahl heißt positiv, wenn x > 0

✓ **Potenzierung**

$$a^b = c$$

a... Basis oder Grundzahl
b... Exponent oder Hochzahl
c...Potenzwert

✓ **Quadrant**

Zwei sich rechtwinkelig schneidentde Geraden zerlegen ihre Ebene in 4 Quadranten. Bei einem rechtwinkeligen Achsenkreuz werden diese mit I, II, III, IV numeriert.
(siehe Koordinatensystem)

✓ **Radius**

Abstand vom Mittelpunkt zur Kreislinie.

r .

(siehe Kreis)

✓ **Radizierung**

$$\sqrt[b]{a} = c$$

a... Radikand
b... Wurzelexponent
c... Wurzelwert; gelesen: b-te Wurzel aus a ist b

✓ **Rechtwinkeliges Dreieck**

Ein Dreieck, das einen rechten Winkel (90 Grad) hat.
. (siehe Winkel und Winkelmaß)

✓ **Rechtwinkeliges (kartesisches) Koodinatensystem**

Dient dazu, um Punkte standardisiert in der Ebene (Raum) durch Zahlendoppel (Zahlentrippel) darstellen zu können.
Beim rechtwinkeligen (kartesischen) Koodinatensystem schneiden sich die Koodinatenachsen im Nullpunkt unter einem rechten Winkel. Man bezeichnet die x- Achse auch als **Abszissenachse** und die y- Achse als **Ordinatenachse**.
Die Festlegung eines beliebigen Punktes erfolgt mit je einer x- und y- Koordinate. Für den Punkt P mit den Koordinaten x und y schreibt man
P(x , y).
(siehe Koordinaten)

✓ **Reelle Zahl**

Die Menge $\Re$ der reellen Zahlen kann charakterisiert werden als „alle“ Zahlen auf der Zahlengerade.
In jedem Intervall sind unendlich viele reelle Zahlen enthalten.

✓ **Spitzer Winkel**

Hat ein Winkel ein Winkelmaß zwischen 0 und 90 Grad, so heißt er spitz.

✓ **Steigung**

Anstieg, Steigungsmaß.

1. Steigung einer Strecke: Ist eine Strecke in einem Koodinatensystem durch ihre Endpunkte P1(x1/y1) und P2(x2/y2) gegeben, so definiert man die Steigung m als m= (y2-y1)/ (x2-x1).
   Es stimmt m überein mit dem Tangens des Steigungswinkels.

2. Die Steigung einer Geraden wird entsprechend definiert, indem man die Steigung zwischen je 2 Punkten betrachtet.
   Ist eine Gerade durch die Gleichung y = mx + b gegeben, so gibt m die Steigung der Geraden an.
   (siehe Koordinaten und Koordinatensystem)

- **Tabelle**

  Übersicht, in der das darzustellende Material übersichtlich in Rubriken aufgezeichnet ist, und in der die Kennzeichnung der einzelnen Rubriken in einer Kopfzeile erfolgt.

- **Term**

  Werden eine oder mehrere Größen, wie Zahlen oder Buchstabensymbole, genannt, die durch Zeichen wie +, -, *, /, ... und Klammern zur Festlegung der Operationsfolge der algebraischen Operationen miteinander verknüpft werden.

- **Umformen einer Gleichung**

  Das Umformen einer Gleichung wird zumeist durchgeführt, um eine Lösung zu finden, oder um eine andere Form der Gleichung zu gewinnen, z.B. um den zugehörigen Funktionsgraphen besser zeichnen zu können. Bei zugelassenen Umformungen kann sich die Lösungsmenge nicht verkleinern, aber vergrößern (z.B. bei Wurzelgleichungen).
  (siehe Funktionsgraph)

- **Ursprung**

  Der Schnittpunkt der Achsen eines Koodinatensystem heißt Ursprung des Koodinatensystems. (siehe Koordinatensystem)

- **Variable**

  Platzhalter für Zahlen, Leerstellenbezeichnung.
  Zeichen, die (leere) Stellen für die Einsetzung von Namen von Elementen einer Grundmenge freihalten, heißen Variable. Die Variable wird im Zusammenhang mit Aussageformen eingeführt.

- **Verhältnis**

  Bezeichnung für einen Term der Form a / b bzw. a : b, b ? 0.

- **Vorzeichen**

  Teilmengen der ganzen Zahlen werden durch Vorzeichen gekennzeichnet (+,-). Die Problematik im Unterricht liegt darin, dass beim Rechnen mit ganzen Zahlen das Minuszeichen in dreifacher Bedeutung auftritt.

  - **Vorzeichenregeln**

  Beim Zusammenkommen von Vorzeichen und Rechenzeichen gilt:
  $\boxed{+(+a) = +a \; ; -(+a) = -a \; ; +(-a) = -a \; ; -(-a) = +a}$

  Ein Minuszeichen vor einer Klammer ändert alle Vorzeichen der Glieder in der Klammer.
  $\boxed{a-(b-c) = a-b+c}$

  Wenn zwei Faktoren das gleich Vorzeichen haben, dann ist das Produkt immer positiv.
  Haben zwei Faktoren verschiedene Vorzeichen, so ist das Produkt immer negativ.

$\boxed{(+a) * (+b) = +ab}$
$\boxed{(-a) * (-b) = +ab}$
$\boxed{(+a) * (-b) = -ab}$
$\boxed{(-a) * (+b) = -ab}$

Haben bei einer Division Dividend und Divisor das gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient immer positiv. Sind die Vorzeichen von Dividend und Divisor verschieden, so ist der Quotient immer negativ.

$\boxed{(+a) : (+b) = +a/b}$
$\boxed{(-a) : (-b) = +a/b}$
$\boxed{(+a) : (-b) = -a/b}$
$\boxed{(-a) : (+b) = -a/b}$

(siehe Vorzeichen)

- ✓ **Wertetabelle**

  Zusammengehörige Argument- und Funktionswerte einer Funktion werden in einer Wertetabelle zusammengestellt.
  (siehe Funktion)

- ✓ **Winkel**

  Ein Winkel ist ein geordnetes Paar von zwei Halbgeraden a und b mit gemeinsamen Anfangspunkt S.
  Die beiden Halbgeraden heißen **Schenkel**, ihr gemeinsamer Anfangspunkt heißt **Scheitel** des Winkels.

- ✓ **Winkelmaß**

  Gibt an, wie groß der Winkel ist. Es gibt verschiedene Winkelmaße: z.B.: Altgrad, Neugrad, Bogenmaß,...

  Altgrad: Im Gegensatz zu Neugrad, ein auf die Babylonier zurückgehendes Winkelmaß. Im Sinne des babylonischen Sechzigersystems wird der Vollwinkel (Vollkreis) zunächst in 6 gleiche Teile geteilt. Dann folgt die Unterteilung dieser Sektoren in 60 Grad, jedes Grad wird in 60 Winkelminuten, jede Winkelminute in 60 Winkelsekunden unterteilt:

  $$1° = 60' , \qquad 1' = 60''$$

  Das ergibt für den rechten Winkel das Maß 90°.
  (siehe Winkel und rechtwinkeliges Dreieck))

4. QUELLENVERZEICHNIS

Reichel, Müller, Laub, Hanisch (1992), Lehrbuch der Mathematik, 3. Auflage, Verlag Hölder- Pichler- Tempsky, Wien

Laub u.a., Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden Schulen, Wien 1970