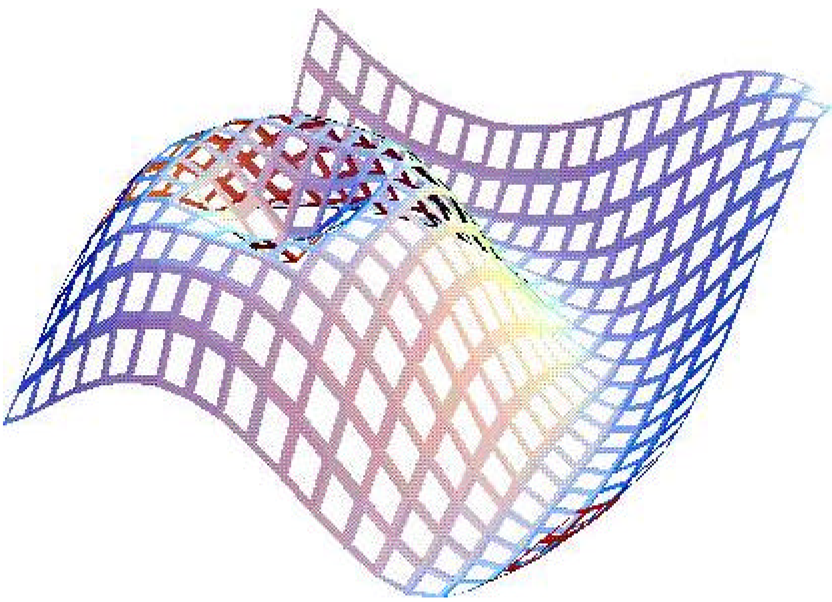
Trigonometrie

1 Einleitung 2
2 Winkel 2
2.1 Definition 2
2.2 Winkelmaße 3
2.2.1 Winkel in Grad 3
2.2.2 Winkel im Bogenmass 3
3 Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck 5
3.1 Definition 5
3.2 Einige häufig auftretenden Funktionswerte 7
3.3 Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks 7
4 Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis 8
5 Graphische Darstellung und Eigenschaften 10
5.1 Eigenschaften 10
5.1.1 Allgemein 10
5.1.2 Periodizität 11
5.1.3 Symmetrie 11
6 Winkelfunktionsgesetze 11



M. Tamburrino

Januar 2004
04-Trigonometrie.doc

1 Einleitung

Die in der Elementargeometrie auftretenden Gleichungen sind algebraisch. Für das Dreieck enthalten diese Gleichungen entweder nur Winkel, z.B. im Satz von der Winkelsumme im Dreieck, oder nur Seiten sowie sonstige Strecken und den Flächeninhalt, z.B. der Satz des Pythagoras.

Der Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks ist nicht durch algebraische Gleichungen darstellbar. Hierfür bedarf es eines besonderen Abschnitts der Geometrie:

Definition
Die **Trigonometrie** der Ebene hat die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Strecken und Winkeln im ebenen Dreieck und in anderen ebenen, geradlinig begrenzten Figuren herzustellen. Sie benutzt hierzu die trigonometrischen Funktionen.

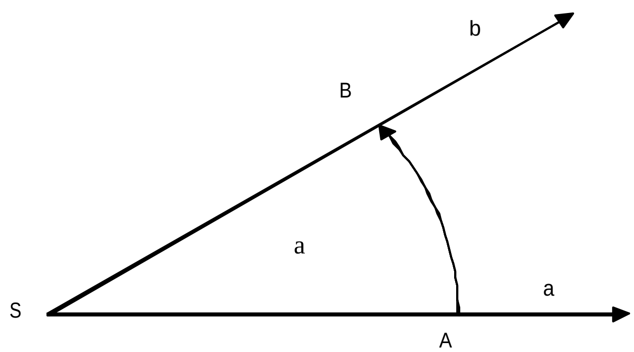
Die Lehre von den Eigenschaften und den gegenseitigen Beziehungen der trigonometrischen Funktionen heisst **Goniometrie** und ist Teil der Trigonometrie. Ebenfalls eine wichtige Rolle spielen trigonometrische Funktionen bei der Beschreibung periodischer Vorgänge (Schwingungen und Wellen).

2 Winkel

2.1 Definition

Im Weiteren werden nur ebene Winkel betrachtet. Jeder Winkel in der Ebene wird durch zwei Halbgeraden (Strahlen) gebildet, die man Schenkel des Winkels nennt und die von einem Punkt, dem Scheitel, ausgehen. Es ist üblich, Winkel mit den kleinen Buchstaben des griechischen Alphabetes zu bezeichnen, also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Zwei Strahlen a und b, die von dem selben Punkt S ausgehen, können durch eine Drehung ineinander überführt werden, durch die der Winkel (a,b) bestimmt wird.

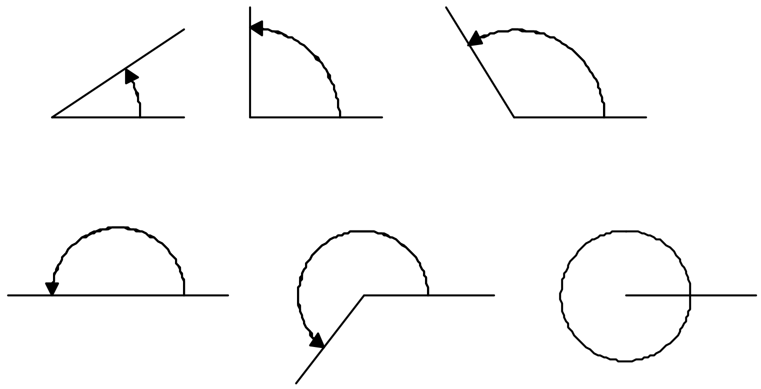


Als Orientierung der Ebene in der a und b liegen, gilt der Drehsinn der Bewegung. Die positive Drehrichtung in der Mathematik ist Entgegen dem Uhrzeigersinn. Es ist demnach zu unterscheiden zwischen den Winkeln (a,b) und (b,a); hier gilt die Beziehung
$\angle (a,b) = -\angle (b,a)$.

Liegt auf dem Strahl a ein Punkt A und auf dem Strahl b ein Punkt B, so kann der Winkel auch durch $\angle ASB$ bzw. $\angle BSA$ bezeichnet werden. S ist der Scheitelpunkt, die Strahlen a und b die Schenkel. Jeder Schenkel gibt als Strahl eine Richtung an; die Größe des Winkels ist dann der Unterschied dieser beiden Richtungen in einer orientierten Ebene.

Winkel werden nach dem Richtungsunterschied der Schenkel eingeteilt:

- Spitze Winkel: zwischen 0° und 90°
- Rechte Winkel: genau 90°
- Stumpfe Winkel: zwischen 90° und 180°
- Überstumpfe Winkel: zwischen 180° und 360°
- Vollwinkel: genau 360°, entspricht einer vollen Umdrehung



Ein Winkel ist demnach der bestimmte Teil eines Vollkreises.

2.2 Winkelmaße

2.2.1 Winkel in Grad

Aus der geschichtlichen Entwicklung heraus hat sich die 360-Grad-Einteilung eingebürgert, nach der einem Vollwinkel 360° entsprechen. Der 360ste Teil eines Vollwinkels entspricht demnach einem Grad. Die weitere Unterteilung des Grades geschieht in Minuten (´) und Sekunden (''):

$$1 \text{ Grad} = 1° = 60´ = 3600''$$

In der Mathematik kann die Einteilung in Grad, Minuten und Sekunden nicht gebraucht werden. Deshalb sind die Minuten und Sekunden immer in Dezimalbrüche von Grad umzurechnen.

2.2.2 Winkel im Bogenmass

Für viele Gebiete der Mathematik ist die Gradeinteilung ungeeignet. Man hat deshalb das Bogenmass eingeführt. Dabei verwendet man einen Kreis vom Radius r und gibt die Länge des Kreisbogens b an, den der Winkel α (als Zentriwinkel) ausschneidet.

Im Kreis ist die Länge des Kreisbogens *b* dem Zentriwinkel α und dem Radius *r* proportional. Es gilt:

Kreisumfang	:	Kreisbogen	=	Vollwinkel	:	Zentriwinkel
$2\pi r$	:	b	=	360°	:	α

Daraus folgt, dass das Verhältnis der Längen von Kreisbogen b und Radius r nur von der Grösse des zum Kreisbogens gehörenden Zentriwinkels α abhängt.

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$$

Somit kann der Bogen zum Messen des dazugehörenden Zentriwinkels eines Kreises benutzt werden. Das geschieht mit Hilfe des **Bogenmasses** x = arc α von α (arc von lat. arcus, Bogen), das wie folgt definiert ist:

$$x = arc\ \alpha = \frac{b}{r} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$$

Das Bogenmass ist als Quotient zweier Strecken dimensionslos. Da für den Kreis mit dem Radius 1 (Einheitskreis) die Bogenlänge

$$b = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$$

ist, also mit dem Bogenmass übereinstimmt, sagt man auch: Das Bogenmass ist die Masszahl der Bogenlänge b im Einheitskreis über dem Zentriwinkel α. Die Einheit des Winkels ist in diesem Fall ein **Radiant** (1 rad). 1 rad ist der Winkel, für den das Verhältnis der Längen von Kreisbogen und Radius gleich 1 ist, d.h. 1 rad entspricht einem Winkel von 57.29578° = 57°17'44,8".

Umrechnung vom Grad- ins Bogenmass $x = arc\ \alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$

Umrechnung vom Bogen- ins Gradmass $\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot x$

Einige wichtige Winkel in Grad- und Bogenmass:

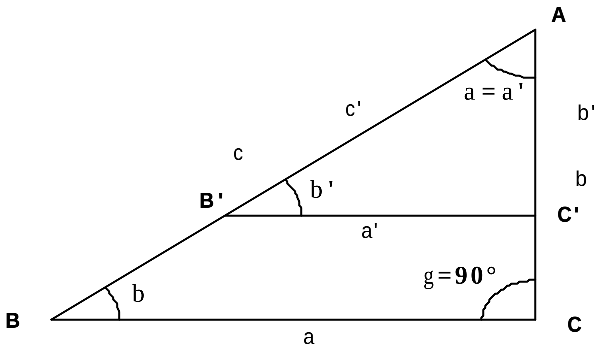
Gradmaß	30°	45°	60°	90°	180°	360°	57°17'45"
Bogenmaß	π/6	π/4	π/3	π/2	π	2π	1 [rad]

Zur Abkürzung wird die Einheit rad oft weggelassen, man schreibt also anstelle von φ rad nur φ.

3 Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck

3.1 Definition

Ein ebenes Dreieck ist nach Gestalt und Größe durch seine 3 Seiten vollständig und eindeutig bestimmt. Die übrigen Stücke (Winkel, Höhen, Inhalt, Umfang etc.) können als Funktionen der Seiten aufgefaßt werden.



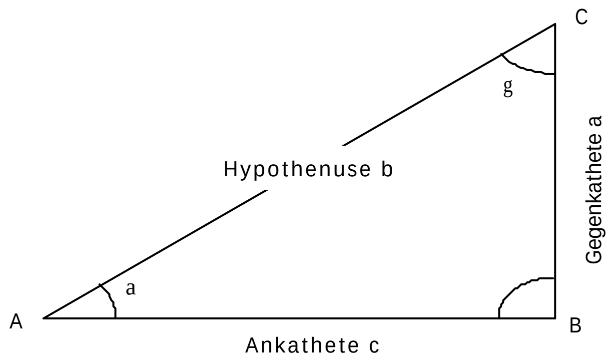
Die Seitenverhältnisse *a/b, a/c, b/c* usw. des in *C* rechtwinkligen Dreiecks *ABC* sind Funktionen des spitzen Winkels *b* und allein durch dessen Größe vollständig bestimmt.

Im 2. Dreieck *AB'C'* (rechtwinklig in *C'*) ist $a' = a$, also auch $b' = b$, d. h. die beiden Dreiecke sind einander ähnlich.

Es gilt: *a/b = a'/b'* , *a/c = a'/c'* , *b/c = b'/c'* usw.

Diese Seitenverhältnisse werden als trigonometrische oder goniometrische Funktionen des Winkels a bezeichnet. Es erfolgt eine Ordnung in Gruppen, je nachdem welche Seiten im Zähler des Bruches stehen. Die Bezeichnung dieser Seiten, ausgehend vom Winkel a ist wie folgt:

a ⇒ Gegenkathete
b ⇒ Ankathete
c ⇒ Hypothenuse



a) Sinus und Tangens

$$\sin a = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} \qquad \tan a = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

b) Cosinus und Cotangens

$$\cos a = \frac{c}{b} = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} \qquad \cot a = \frac{c}{a} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

γ ist das Komplement von α, da gilt γ =90°-α. Hieraus folgen die Komplementsätze:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$$

Zwischen den trigonometrischen Funktionen gelten einige weitere Beziehungen, die sich im rechtwinkligen Dreieck leicht nachrechnen lassen, die aber auch allgemein, d. h. für beliebige Winkel α gelten:

Bildung der Quadrate für Sinus und Cosinus ergibt:

$$\sin^2\alpha = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{sowie} \quad \cos^2\alpha = \frac{c^2}{b^2}$$

für die Quadratsumme folgt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

mit

$$a^2 + c^2 = b^2 \quad \text{(Lehrsatz des Pythagoras)}$$

ergibt sich

$$\boxed{\begin{array}{c} (\sin^2\alpha) + (\cos^2\alpha) = 1 \\ \text{sowie} \\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \end{array}}$$

Weiterhin gelten:

$$\boxed{\begin{array}{c} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha} \qquad \tan\alpha * \cot\alpha = 1 \\ \\ 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \end{array}}$$

Bemerkung

Für die Potenz einer trigonometrischen Funktion schreibt man den Exponenten unmittelbar hinter die Funktionsvorschrift. Somit ist $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$. Dagegen bedeutet $\sin\alpha^2$, dass der Sinus von α^2 zu bilden ist.

Mit den obenstehenden Gleichungen lässt sich jede trigonometrische Funktion durch jede andere Funktion desselben Argumentes ausdrücken.

3.2 Einige häufig auftretenden Funktionswerte

Die Funktionswerte der Winkelfunktionen liegen in Tabellen und Taschenrechnern vor, so dass man die Funktionswerte für jedes beliebige Argument aus dem Definitionsbereich näherungsweise ermitteln kann. Für einige häufig auftretende Winkel sind die exakten Werte in folgender Tabelle zusammengefasst.

Funktion	φ **=30°**	φ **=45°**	φ **=60°**	φ **=30°**	φ **=45°**	φ **=60°**
sin φ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,5000	0,7071	0,8660
cos φ	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0,8660	0,7071	0,5000
tan φ	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	0,5774	1,000	1,7321
cot φ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1,7321	1,000	0,5774

3.3 Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

Durch die Definition der trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens als die zu einem Dreieck gehörenden Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck sind die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln hergestellt. Wir haben also mit den trigonometrischen Funktionen das Hilfsmittel für die vollständige Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks erhalten.

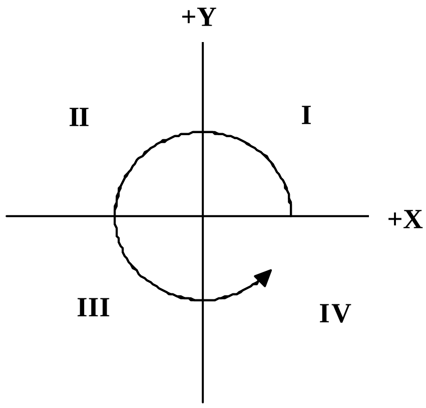
Wir unterscheiden fünf Grundaufgaben:

1. Gegeben sind die Katheten a und b. Zu berechnen sind
   - sind die Winkel α und β
   - die Hypothenuse c
2. Gegeben sind die Hypothenuse c und eine Kathete (z.B. a)
   - die Winkel α und β
   - die andere Kathete b
3. Gegeben sind ein Winkel (z.B. α) und seine Gegenkathete a. Zu berechnen sind
   - der zweite Winkel β
   - die Ankathete b
   - die Hypothenuse c
4. Gegeben sind ein Winkel und seine Ankathete. Zu berechnen sind
   - der zweite Winkel β
   - die Gegenkathete a
   - die Hypothenuse c
5. Gegeben sind ein Winkel und die Hypothenuse. Zu berechnen sind
   - der zweite Winkel β
   - die beiden Katheten a und b

4 Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis

Definition der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel

Um die trigonometrischen Funktion für Winkel beliebiger Größe zu erklären, ist den Betrachtungen ein *kartesisches Koordinatensystem* zu Grunde zu legen.



Das Koordinatensystem teilt die Ebene in vier Quadranten.

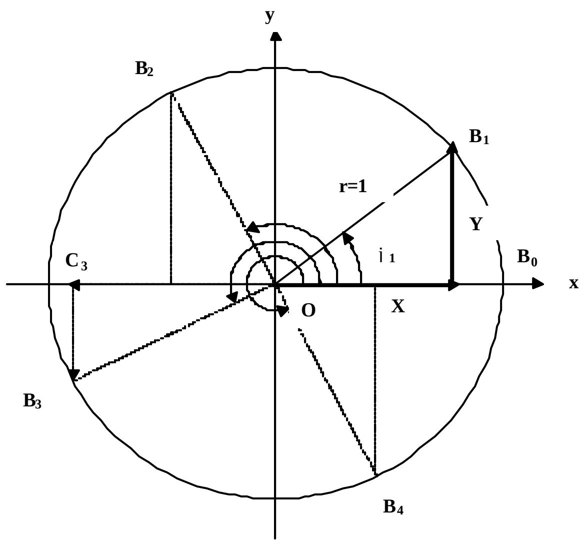
Definition am Einheitskreis

In einem ebenen kartesischen Koordinatensystem durchläuft ein Winkel φ alle 4 Quadranten. Sein freier Schenkel schneidet den Kreis mit dem Radius r = 1 um den Koordinatenursprung, den *Einheitskreis*, in den Punkten B_i. Für den Schnittpunkt B_0 der x-Achse mit dem Einheitskreis hat φ den Wert 0. Während eines Umlaufs des freien Schenkels nimmt φ alle Werte von 0° - 360° ein.

Die jeweilige Lage des Punktes B_i , z. B. B_1, B_2 oder B_3 wird durch seine Koordinaten bestimmt:

- Die Abszisse ist die senkrechte Projektion des jeweiligen Radius r=1 auf die x-Achse.
- Die Ordinate die senkrechte Projektion dieses Radius auf die y-Achse.

Die Koordinatenwerte sind z. B. für die Lage B_3 beide negativ:



Im 1. Quadranten gelten die bekannten Definitionen für die Winkelfunktionen. Es wird darüberhinaus festgesetzt, daß die gleichen Definitionen für alle Quadranten erhalten bleiben, d. h., es soll für jede Lage des Punktes Bi gelten:

$$\sin \varphi = \frac{Ordinate}{Radius} \qquad \cos \varphi = \frac{Abszisse}{Radius}$$

$$\tan \varphi = \frac{Ordinate}{Abszisse} \qquad \cot \varphi = \frac{Abszisse}{Ordinate}$$

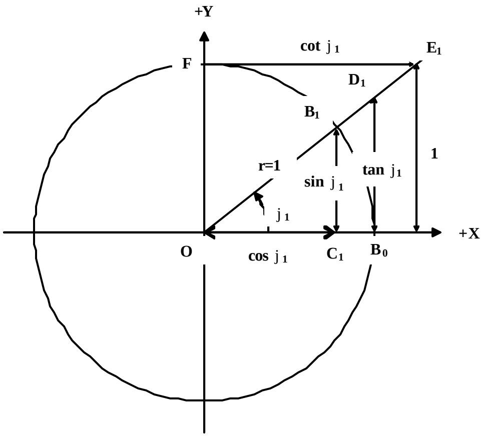
Abszisse und Ordinate haben in Abhängigkeit von den Quadranten verschiedene Vorzeichen, der Radius hingegen ist immer positiv.

Daraus ergeben sich für die 4 trigonometrischen Funktionen unterschiedliche Vorzeichen:

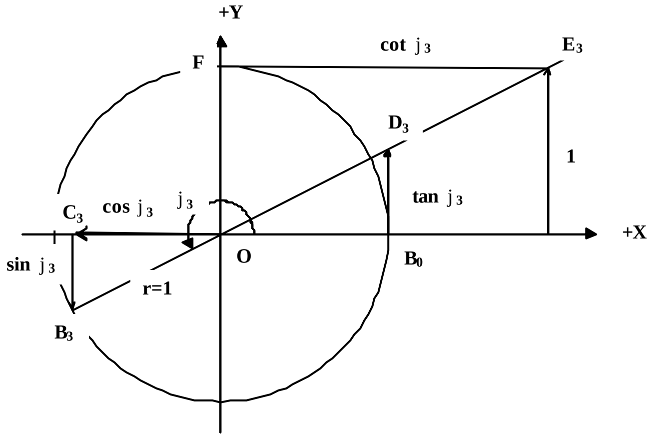
Funktion	**I**	**II**	**III**	**IV**
sin j	+	+	-	-
cos j	+	-	-	+
tan j	+	-	+	-
cot j	+	-	+	-

Auch für die Werte 0°, 90°, 180°, 270° und 360° lassen sich die trigonometrischen Funktionen berechnen. Unstetigkeiten treten jedoch für Tangens- und Kotangensfunktionen auf (Nenner des Bruchs geht gegen 0), sodass deren Grenzwerte bei ±∞ liegen.

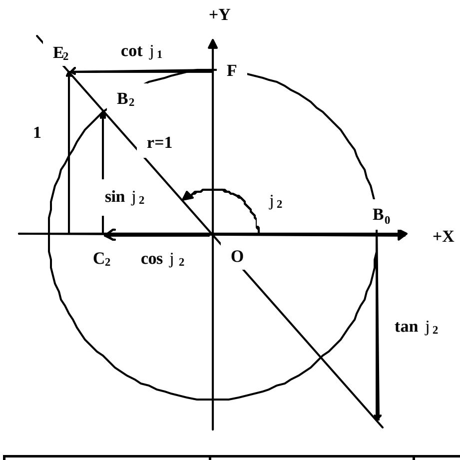
φ im I. Quadranten



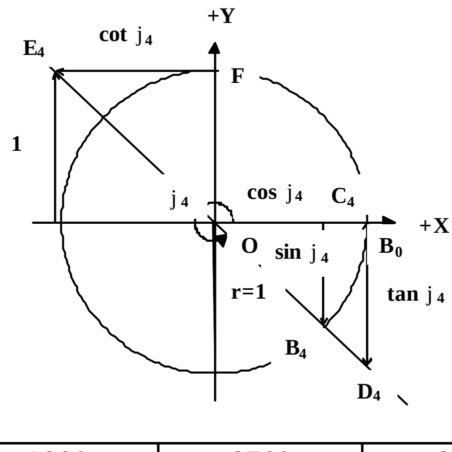
φ im III. Quadranten



φ im II. Quadranten



φ im IV. Quadranten

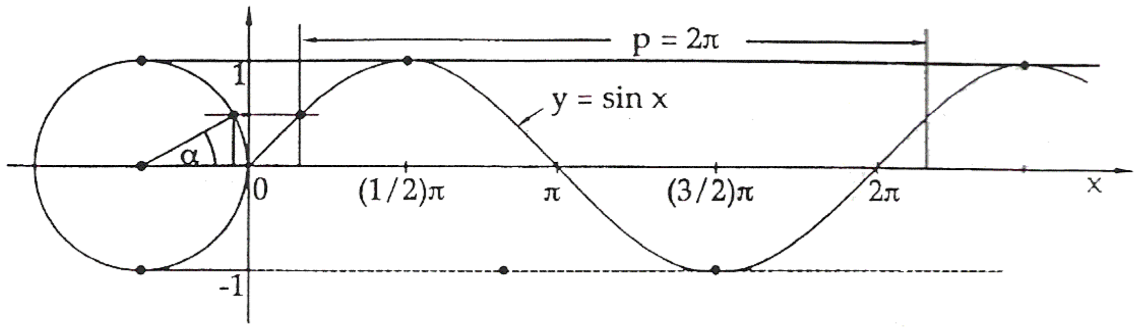


Winkel	0°	90°	180°	270°	360°
sin φ	0	+1	0	-1	0
cos φ	+1	0	-1	0	+1
tan φ	0	±∞	0	±∞	0
cot φ	±∞	0	±∞	0	±∞

5 Graphische Darstellung und Eigenschaften

Ein anschauliches Bild von trigonometrischen Funktionen erhält man durch ihre graphische Darstellung in einem kartesischen Koordinatensystem, in das man auf der waagrechten Achse die Argumente x in rad und auf der dazu senkrechten Achse die entsprechenden Funktionswerte einträgt. Die Funktionswerte ergeben sich als Masszahl der im Einheitskreis eingezeichneten Strecken.

In der folgenden Abbildung ist die Sinusfunktion als Projektion der jeweiligen Position im Einheitskreis dargestellt:



Aus dieser Abbildung lassen sich einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ablesen.

5.1 Eigenschaften

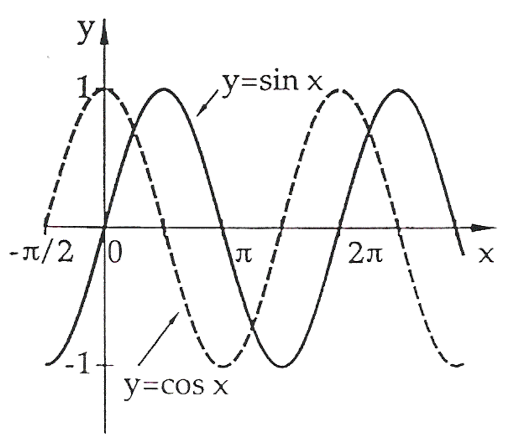
5.1.1 Allgemein

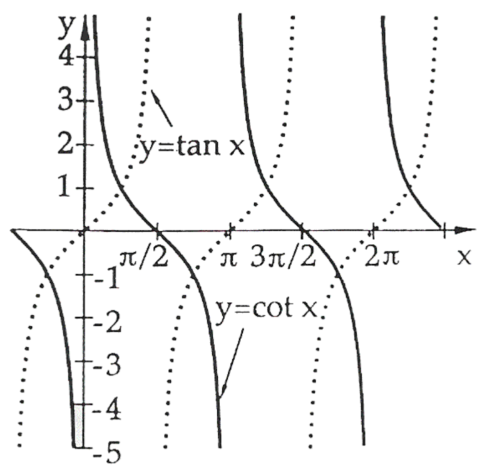
Sinus- und Cosinusfunktion

- ❖ Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind für alle x-Werte definiert
- ❖ Ihr Wertebereich liegt zwischen +1 und -1
- ❖ Damit sind Sinus- und Cosinusfunktion beschränkte Funktionen

Tangens- und Cotangensfunktion

- ❖ Die Tangens- und die Cotangensfunktion sind unbeschränkte Funktionen, ihr Wertebereich liegt zwischen $-\infty$ und $+\infty$.
- ❖ Ihr Definitionsbereich ist eingeschränkt:
  - o tan(x) ist für $x = \pm \frac{1}{2}\pi$, $\pm 3/2\pi$, $\pm 5/2\pi$, ... nicht definiert
  - o cot(x) ist für $x = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... nicht definiert.





5.1.2 Periodizität

Wir der Verlauf der Funktionen Sinus und Cosinus nach links und rechts, d.h. für beliebig große positive und negative Winkel fortgesetzt, so zeigt sich, daß die Sinusse und Cosinusse für alle Winkel, die sich um 360° (2π) oder ganzzahlige Vielfache davon unterscheiden, gleich sind.

Für Tangens und Cotangens stellen sich bei Winkelunterschieden von $\pm$ 180° (π) gleiche Funktionswerte ein.

Definition

Eine Funktion f(x) des Arguments x heißt periodisch mit der Periode P, wenn sie bei Änderung des Arguments um P unverändert bleibt, also $f(x+P) = f(x)$ ist. Das Argument kann um ein beliebiges ganzzahlig Vielfaches von P geändert werden.

$\sin(\varphi \pm 2\pi) = \sin \varphi$ $\quad$ $\cos(\varphi \pm 2\pi) = \cos \varphi$

bzw.

$\sin(\varphi + n*2\pi) = \sin \varphi$ $\quad$ $\cos(\varphi + n*2\pi) = \cos \varphi$

sowie

$\tan(\varphi + n*\pi) = \tan \varphi$ $\quad$ $\cot(\varphi + n*\pi) = \cot \varphi$

wenn n eine ganze Zahl ist.

5.1.3 Symmetrie

Die Cosinusfunktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse, also gilt:

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

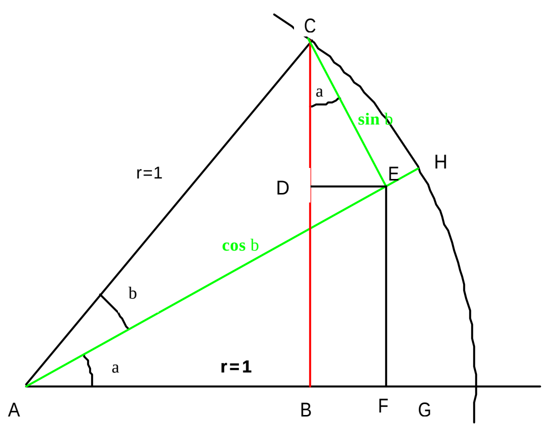
Die Sinus-, Tangens- und Cotangensfunktion sind zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung, also gilt:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$
$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

6 Winkelfunktionsgesetze

In diesem Abschnitt werden eine Reihe von goniometrischen Formeln hergeleitet, deren Grundlage die sog. **Additionstheoreme** bilden.

Die Additionstheoreme geben an, wie sich die trigonometrischen Funktionen einer Summe oder einer Differenz zweier Winkelgrößen α und β aus den trigonometrischen Funktionen der Einzelwinkel zusammensetzen. Sie sind der Oberbegriff für Summen von Funktionen, Produkte und deren Umwandlung. Sie werden vorzugsweise in Beweisen angewandt.



Herleitung des Theorems für sin(α+β) und für cos(α+β). Es gilt:

$$\sin(a+b) = \frac{BC}{AC} = \frac{EF+CD}{AC} = EF + CD \quad (da\ AC = 1)$$
$$\cos(a+b) = \frac{BC}{AC} = \frac{AF-BF}{AC} = AF - DE \quad (da\ AC = 1)$$

Zudem gilt:

$$\sin(a) = \frac{EF}{\cos(b)} \qquad \cos(a) = \frac{AF}{\cos(b)}$$
$$\cos(a) = \frac{CD}{\sin(b)} \qquad \sin(a) = \frac{DE}{\sin(b)}$$

Werden diese Formeln oben eingesetzt ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}}$$

Ähnlich kann man herleiten:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a * \tan b} \qquad \cot(a+b) = \frac{\cot a * \cot b - 1}{\cot a + \cot b}\\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a * \tan b} \qquad \cot(a-b) = \frac{\cot a * \cot b + 1}{\cot a - \cot b}\end{aligned}}$$

Diese Formeln sind nur für Winkel α+β < 90° hergeleitet worden. Sie gelten jedoch ganz allgemein für alle Winkel!

Ganz ähnlich oder durch zusammensetzen der oben erwähnten Ergebnisse erhält man auch die Funktionen von Winkelvielfachen (z.B. sin(2α)) oder Winkelteilen (z.B. sin(α/2)).

An dieser Stelle sei nun auf die Formelsammlung (z.B. Papula „Mathematische Formelsammlung, 7. Auflage, Kapitel 7.6 Trigonometrische Formeln, S. 94ff) hingewiesen.