

Untersuchungsmethoden für
Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Differenzierbarkeit

1. Klassische Methode

aus der Definition heraus über das Grenzverhalten der Sekantensteigungen.

$$\text{Rechte Seite: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ mit } x > x_0$$

$$\text{Linke Seite: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ mit } x < x_0$$

2. h-Methode

Durch Ersetzen von $x - x_0$ durch $h = x - x_0$ entstehen folgende zwei Grenzwertuntersuchungen:

$$\text{Rechte Seite: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ mit } h > 0$$

Aus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ folgt mit $h < 0$ die

$$\text{Linke Seite: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \text{ mit } h > 0$$

Eine Funktion heißt nun **differenzierbar**, wenn die Grenzwerte der rechten und linken Differenzenquotienten an die Stelle x_0 gleich sind, da dann die beiden Tangenten x_0 identisch sind.

! **Tipp:** Bevorzuge die Klassische Methode

Stetigkeit

Wie bei der Differenzierbarkeit gibt es hier zwei Möglichkeiten:

1. Klassische Methode

$$\text{Rechte Seite: } \lim_{x \searrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \text{ mit } x > x_0$$

$$\text{Linke Seite: } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \text{ mit } x < x_0$$

2. h-Methode

Durch Ersetzen von $x \searrow x_0$ durch $h = x - x_0$ entstehen folgende zwei Grenzwertuntersuchungen:

$$\text{Rechte Seite: } \lim_{h \searrow 0} f(x_0 + h) \neq f(x_0) \text{ mit } h > 0$$

$$\text{Linke Seite: } \lim_{h \searrow 0} f(x_0 - h) \neq f(x_0) \text{ mit } h > 0$$

Eine Funktion heißt **stetig**, wenn die Funktionswerte von rechts und links an die Stelle x_0 kommend gleich sind.

! **Tipp:** Bevorzuge die h-Methode

Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

$$\begin{array}{c} \text{Differenzierbarkeit} \not\Rightarrow \text{Stetigkeit} \\ \text{bzw.} \\ \not\Rightarrow \text{Differenzierbarkeit} \not\Rightarrow \text{Stetigkeit} \end{array}$$

Anmerkung: $\not\Rightarrow$ ist das Logik-Symbol für „nicht“