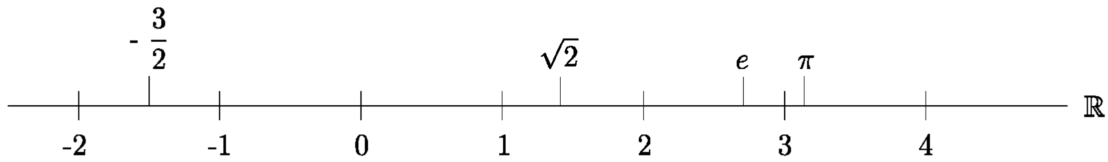
Kapitel 1

REELLE ZAHLEN

Fassung vom 22. Februar 2003

1.1 Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Diese Menge kann man an der Zahlengeraden veranschaulichen :



Zahlen kommen in den Naturwissenschaften als Meßwerte vor, z.B.

(a) Länge, Fläche, Volumen, Masse eines Körpers.

(b) Zeit, Temperatur, Höhe eines Ortes auf der Erde, elektrisches Potential (z.B. in Nervenleitungen).

Durch Festlegung einer (Maß-) *Einheit* (z.B. der Länge in m , Masse in g , Zeit in s) und in (b) eines *Nullpunktes* ergibt sich eine *Meßskala* aus reellen Zahlen.

Physikalische Größen werden in SI-Einheiten (Système International d'Unités) angegeben.

BEMERKUNG 1 In den Naturwissenschaften sind andere Skalen gebräuchlich, z.B. die Härteskala von Mineralien oder die IQ-Skala, bei denen die Zuordnung von Zahlenwerten relativ wilkürlich ist; diese dienen im wesentlichen einer einfacheren Beschreibung von Beobachtungen.

Wir benutzen folgende abkürzende Bezeichnungen :

$x \in M$	x ist Element von M
$N \subset M$	N ist (nicht notwendig echte) Teilmenge von M
$:=$	Der *Definitionsdoppelpunkt* steht bei einem neu eingeführten Begriff
$A \implies B$	aus A folgt B
$A \iff B$	A gilt genau dann, wenn B gilt oder A ist äquivalent zu B

Z.B.

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$$

$$x^2 := x \cdot x$$

$$x \geqslant 0 \implies x^2 \geqslant 0$$

$$x \neq 0 \iff x^2 > 0$$

Grundeigenschaften der reellen Zahlen

(1) Sind a, b reelle Zahlen, $a, b \in \mathbb{R}$, so sind

$$a + b,\ a - b,\ a \cdot b,\ \frac{a}{b} \quad \text{falls} \quad b \neq 0$$

als reelle Zahlen erklärt, und es gelten die bekannten Rechenregeln, z.B. für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

Kommutativgesetz

$$a + b = b + a \quad , \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Symmetrie

$$-(-a) = a$$

Bruchrechnumg Falls $b, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} .$$

(2) $\mathbb{R}$ ist lückenlos, z.B. liegen alle Längenangaben in $\mathbb{R}$:

BEISPIEL 1 Die Länge der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Seitenlängen 1 und 2 ist

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2.236\ldots \in \mathbb{R} .$$

Der Umfang eines Kreises mit Radius 1 ist $2\pi \in \mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}$ ist geordnet : Für $a, b \in \mathbb{R}$, schreibt man $a \leqslant b$ (oder $b \geqslant a$) falls a kleiner oder gleich b ist (d.h. b größer oder gleich a ist). Weiter schreibt man $a < b$ (oder $b > a$) falls $a \leqslant b$ und $a \neq b$ ist.

SATZ *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.*
Ist $a \leqslant b$, so folgt

$$c \cdot a \leqslant c \cdot b \quad \textit{falls} \quad c \geqslant 0$$

und

$$c \cdot a \geqslant c \cdot b \quad \textit{falls} \quad c \leqslant 0 .$$

BEISPIEL 2 Es ist $\sqrt{2} = 1.414\ldots < 1.5$.

Wäre $\sqrt{2} \geqslant 1.5$, so hätte man

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \geqslant \sqrt{2} \cdot 1.5 \geqslant 1.5 \cdot 1.5 = 2.25 ,$$

einen Widerspruch. Also ist die Annahme falsch, d.h. es gilt $\sqrt{2} < 1.5$. □

DEFINITION Der *Betrag* $|a|$ von $a \in \mathbb{R}$ ist der Abstand von a zu 0 , d.h.

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \phantom{\text{falls}} \quad a < 0 \end{cases} ,$$

wobei der Doppelpunkt in obiger Formel anzeigt, daß ein neues Zeichen eingeführt wurde.

Z.B. ist

$$|\pi| = |-\pi| = \pi \ .$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a - b|$, die Distanz zwischen a und b , der *absolute Fehler* zwischen dem wahren Wert b und einem Näherungswert (z.B. Meßwert) a .

Wichtiger ist der *relative Fehler* $r := \left|\dfrac{a-b}{a}\right|$. Er wird oft in % ausgedrückt (siehe §1.3) : $\widetilde{r}\%$, d.h.

$$\widetilde{r} = 100 \cdot r \ .$$

Dies bedeutet, daß

$$|a - b| = \widetilde{r}\% \ a \ .$$

BEISPIEL 3 Der absolute Fehler zwischen 1000 und 1001 ist $|1000 - 1001| = 1$. Dagegen ist der relative Fehler $\left|\frac{1000-1001}{1000}\right| = 0.001 = 0.1\%$.

Benutzt man für die allgemeine Gaskonstante $R_m = 8.31441 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$ den Wert 8 , so macht man einen relativen Fehler von

$$\left|\frac{8 - 8.31441}{8}\right| = 0.039301 \simeq 4\% \ .$$

Der relative Fehler ist bei festem Nullpunkt unabhängig von Maßeinheiten!

BEMERKUNG 2 Ist der relative Fehler r *klein gegen* 1 (bei Rundungsfehlern i.a. $< 1\%$, bei Meßfehlern i.a. $< 5\%$), so schreibt man auch

$$r = \left|\frac{a-b}{a}\right| \ll 1 \quad \text{und} \quad |a - b| \ll |a| \quad \text{sowie } a \simeq b \ ,$$

wie in obigem Beispiel.

1.2 Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$

(a) Die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \ .$$

Man kann addieren, multiplizieren, aber nicht unbedingt subtrahieren oder dividieren.

$$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} \ .$$

(b) Die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} := \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \ .$$

Man kann addieren, multiplizieren und subtrahieren, aber nicht unbedingt dividieren.

(c) Die *rationnalen Zahlen* (*Brüche*)

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \ , \ q \in \mathbb{N}^* \right\} \ .$$

Man kann addieren, multiplizieren, subtrahieren und dividieren, aber nicht unbedingt Wurzeln ziehen, z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Brüche lassen sich unterschiedlich darstellen:

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} = -\frac{4}{6} = -0.666\ldots \in \mathbb{Q}$$

sind zwei gekürzte Bruchdarstellung, eine nicht gekürzte Bruchdarstellung, sowie eine Dezimaldarstellung derselben Zahl.

Zahlen werden als Bruch angegeben, wenn ganzzahlige Verhältnisse vorliegen :

(d) Die *Komputerzahlen*

$$\mathbb{K} := \{\text{Zahlen meines Taschenrechners}\}$$

Es gilt

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \ \supset \mathbb{K} \not\supset \mathbb{Z} \ .$$

Das unüberlegte Rechnen mit dem Taschenrechner kann zu groben Fehlern führen. Berechnungen sollten zunächst exakt durchgeführt werden und erst zum Schluß sollten konkrete Zahlen eingesetzt werden. So vermeidet man unnötige Rechnungen und Rundungsfehler.

(e) Die *Intervalle* sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, die mit je zwei Punkten alle Zwischenpunkte enthalten. Z.B. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

(i) abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

(ii) offenes Intervall

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

(iii) rechts halboffenes Intervall

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

(iv) links halboffenes Intervall

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

(v)
$$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$$

(vi)
$$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$