Kapitel 2

FUNKTIONEN

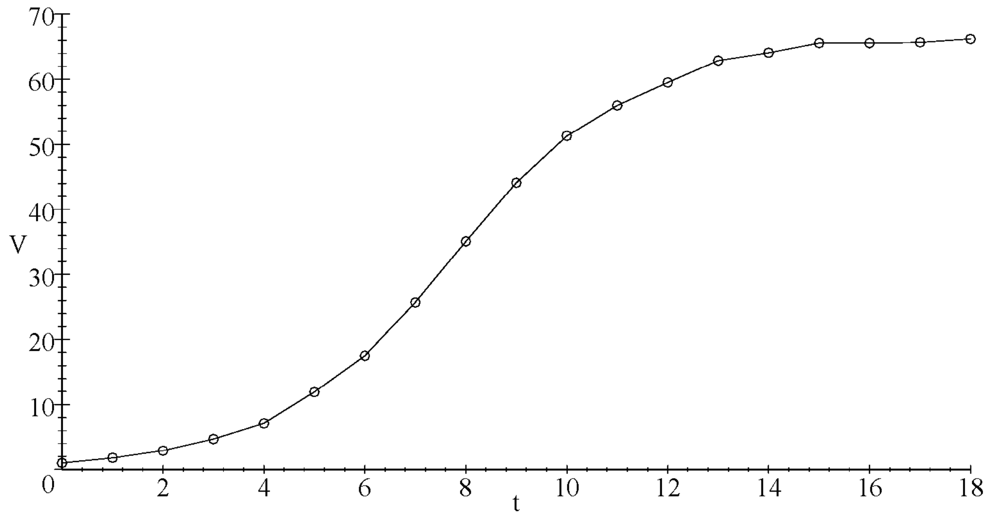
Fassung vom 5. Dezember 2000

2.1 Der Funktionsbegriff

BEISPIEL 1 Carlson hat 1913 die Vermehrung von Hefezellen in einer Gärflüssigkeit untersucht. So ein Experiment beschreibt folgende Tabelle, wobei t die Zeit in Stunden und $V(t)$ das Verhältniss des Volumenteiles zur Zeit t zur Anfangsvolumenteil der Hefe ist:

t	V
0	1
1	1.8
2	2.9
3	4.7
4	7.1
5	11.9
6	17.5
7	25.7
8	35.1
9	44.1

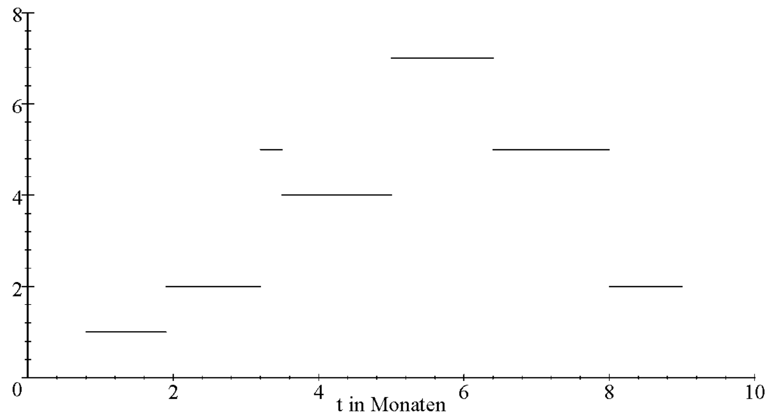
t	V
10	51.3
11	56.0
12	59.5
13	62.9
14	64.1
15	65.6
16	65.6
17	65.7
18	66.2
19	?



Wir werden dieses Beispiel in 3.4 und 8.4 weiter behandeln.

Zu jeder Zeit t zwischen 0 und dem Abbruch des Experimentes gehört natürlich ein eindeutiger Wert für V und so ist es ganz natürlich, dass in der graphischen Veranschaulichung in einem rechtwinkligem Koordinatensystem außer den Messwerten auch für die übrigen Zeiten t ein geschätzter Wert für V eingetragen ist. Im Allgemeinen ist es keineswegs selbstverständlich, daß dabei eine durchzogene Linie die qualitativ richtige Beschreibung wiedergibt. Dazu ein weiteres Beispiel:

BEISPIEL 2 Studenten in einer Eisdiele:



Gemeinsam an diesen Beispielen ist, daß eine Größe (Konzentration, Anzahl) eindeutig von einer anderen Größe (Zeit) abhängt.Genauer:

DEFINITION Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) \ ,$$

die jeder Zahl x aus einer Teilmenge D_f von $\mathbb{R}$, der *Definitionsmenge* , eine und nur eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet. Dieser Wert $f(x)$ heißt *Funktionswert* von f im Punkte x . Die Menge $W_f := \{f(x) \mid x \in D_f\}$ aller Funktionswerte von f heißt *Wertemenge* .

Eine Funktion wird meistens durch eine Funktionsgleichung definiert, d.h $f(x)$ kann aus einer Formel und der Angabe von x berechnet werden.

BEMERKUNG Funktionale Abhängigkeiten sind zentral in den Naturwissenschaften. Ihre mathematische Beschreibung erfolgt in einem Modell mit einem bestimmten Erfahrungsbereich, der i.a. eine echte Teilmenge des Definitionsbereichs der Funktion ist. Funktionen sind manchmal als Standardfunktionen direkt angebbar, manchmal sind sie erst als Lösungen von mathematischer Beschreibung der Gesätzmäßigkeiten, z.B. ein Wachstumsgesetz, die den Naturvorgängen zugrunde liegen, beschreibbar. Wir werden Klassen von solchen Standardfunktionen in den nächsten beiden Kapitel betrachten und werden dann Differentialgleichungen aufstellen und zu lösen suchen. Wichtig sind noch graphische Methoden, die direkt aus einer Messreihe auf zugeordnete Funktionen schließen lassen (vgl. Beispiel 1, Vermehrung von Hefezellen). Vom Graphen sind dadurch endlich viele Punkte in der Ebene gegeben, manchmal interpoliert man zwischen diesen Werten um ein kontinuierliches Modell zu bekommen. Dabei wird man - durch Variablentransformationen - die Darstellung zu linearen Funktionen zurückzuführen. Auf diese Weise lassen sich z.B. auch der Einfluß der unvermeidbaren Meßfehler verkleinern.

In beiden Fällen wird i.a. eine möglichst einfache Funktionsgleichung gesucht, die das Bildungsgesetz bzw. die Meßreihe gut approximiert.

Es gibt aber auch Größen, die nicht funktional voneinander abhängen, wie die menschliche Augenfarbe von der Windgeschwindigkeit.

BEISPIEL 3 Die Funktion "Quadrieren"

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

kann auch durch

$$D_f := \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x) := x^2$$

oder kürzer durch

$$f(x) := x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

angeben weden. Es gilt

$$W_f = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\} \ .$$

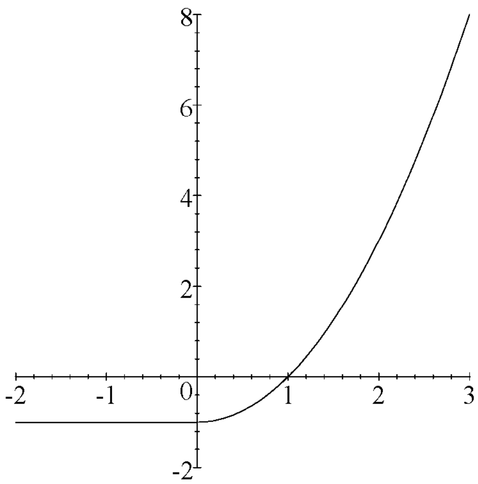
BEISPIEL 4 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x < 0 \\ -1 + x^2 & \phantom{\text{falls}} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

wird auch durch $D_f := \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x < 0 \\ -1 + x^2 & \phantom{\text{falls}} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

gegeben. Es gilt $W_f = [-1, \infty[\ := \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.



Eine Funktion f kann man durch ihren *Graph* $\mathrm{Gr}\, f$ darstellen. Dies ist die Menge aller Punkte in der Ebene mit den Koordinaten $(x, f(x))$ für $x \in D_f$, d.h.

$$\mathrm{Gr}\, f := \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in D_f \quad \text{und} \quad y = f(x)\right\} .$$

Die Gleichung $y = f(x)$ wird als *Gleichung des Graphen* oder als *Funktionsgleichung* von f bezeichnet.

Es gilt also

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) .$$