2.2 Einfache Klassen von Funktionen

Affine Funktionen

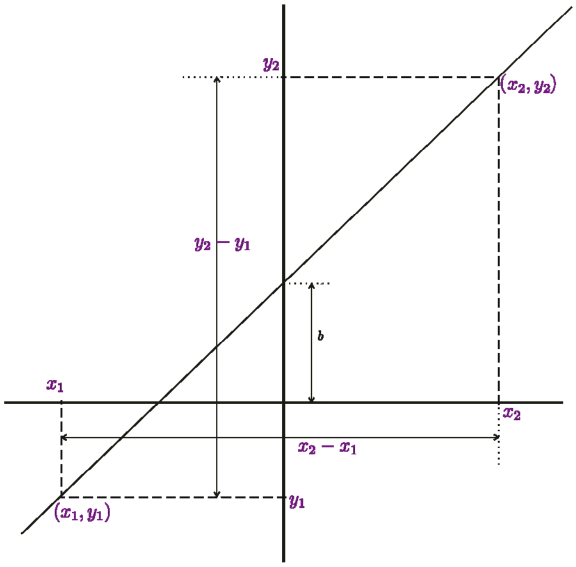
Diese Funktionen sind durch eine Funktionsgleichung der Gestalt

$$D_f := \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x) := c \cdot x + b$$

für Konstanten $c, b \in \mathbb{R}$ bestimmt. Der Graph ist eine Gerade und wird durch zwei Punkte in der Ebene (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$ festgelegt. Die Steigung c und der Abszissenabschnitt b sind durch

$$c := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad b := \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1} = y_j - c \cdot x_j \quad \text{für} \quad j = 1, 2$$

gegeben.



Ist speziell $b = 0$, d.h.

$$f(x) = c \cdot x \ ,$$

so heißt $f(x)$ *proportional zu* x mit Proportionalitätskonstante c . Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung und wird durch einen Punkt (x_1, y_1) mit $x_1 \neq 0$ in der Ebene festgelegt. Für die Steigung gilt

$$c = \frac{y_1}{x_1} \ .$$

So eine Funktion nennt man *linear* .

BEISPIEL 1 Der Wasserdruck p ist eine affine Funktion der Eintauchtiefe d . Dabei gilt in Meerwasser $p = c \cdot d + 1$ mit $c = 0{,}094\,\mathrm{bar} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Damit lebt ein Tiefseefisch in $1000\,\mathrm{m}$ Tiefe unter einem Wasserdruck von $95\,\mathrm{bar}$, also dem 95-fachem des atmosphärischen Druckes.

BEISPIEL 2 Die Stoffmenge n einer Lösung ist proportional zum Volumen V

$$n(V) = c \cdot V \ ,$$

wobei c die Konzentration ist.

BEISPIEL 3 Bei der gleichförmigen Bewegung ist die zurückgelegte Strecke s proportional zur Zeit t

$$s(t) = v \cdot t \ ,$$

wobei v die Geschwindigkeit ist.

Potenzfunktionen

Dieses sind Funktionen der Form

$$f(x) := c \cdot x^n \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

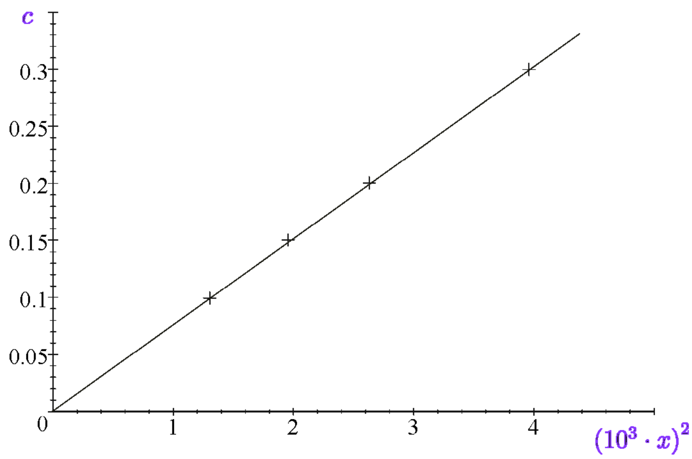
wobei $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ ist. Da $f(x)$ zu x^n proportional mit Proportionalitätskonstante c ist, liegen die Punkte $(x^n, f(x))$ auf einer Geraden durch den Ursprung mit der Steigung c . Dies liefert einen graphischen Test, bei dem man die Konstante c ablesen kann.

BEISPIEL 4 Dissoziation von Propionsäure. Sei c die Konzentration der Säure und x die Konzentration der H_3O^+-Ionen. Man misst folgende Abhängigheit :

c	0.1	0.15	0.2	0.3
$10^3 \cdot x$	1.15	1.40	1.62	1.99
$(10^3 \cdot x)^2$	1.32	1.96	2.62	3.96

Anhand dieser Zahlen vermutet man, daß c zu x^2 proportional ist, d.h.

$$c(x) = a \cdot x^2 \ .$$



Polynome

Diese Funktionen entstehen durch Addition aus Potenzfunktionen

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist, sagt man daß n der Grad des Polynoms ist.

Quadratische Funktionen

Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{mit } a \neq 0$$

ist eine *Parabel* .

Lösung der quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \; .$$

Die (zwei) Lösungen in $\mathbb{R}$ sind

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{falls} \quad b^2 - 4ac \geqslant 0$$

Falls $b^2 - 4ac < 0$ treten “komplexen Zahlen” auf.

Man erhält diese Lösungsformel durch äquivalente Umformung der quadratischen Gleichung mittels *quadratischer Ergänzung* :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

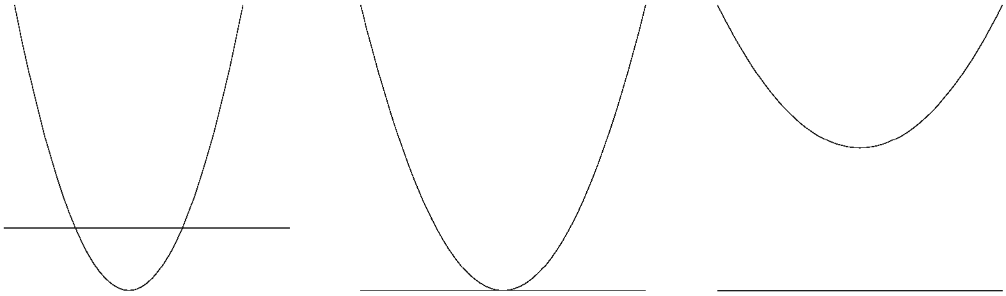
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Daraus folgt, daß die quadratische Gleichung für $b^2 - 4ac > 0$ zwei, für $b^2 - 4ac = 0$ eine und für $b^2 - 4ac < 0$ keine Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Für $a > 0$ erhält man folgende Graphen der quadratischen Funktion f :



$b^2 - 4ac \geqslant 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac = 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac < 0$

Man kann auch

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

schreiben. Aus dieser Darstellung liest man alle wesentlichen Eigenschaften von f ab: Für $x = -\frac{b}{2a}$ ist f minimal, d.h. $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ ist der *Scheitelpunkt der Parabel* . f ist zwischen den Nullstellen x_1 und x_2 negativ :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2\} =: [x_1, x_2] \ .$$

Man sieht auch, daß man den Graphen von dieser Funktion aus dem von $x \longmapsto ax^2$ durch Verschiebung um $\frac{-b}{2a}$ in x-Richtung und um $c - \frac{b^2}{4a}$ in y-Richtung erhält.

Rationale Funktionen

Diese Funktionen entstehen durch Quotientenbildung von Polynomen

$$\frac{P}{Q} : \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \ ,$$

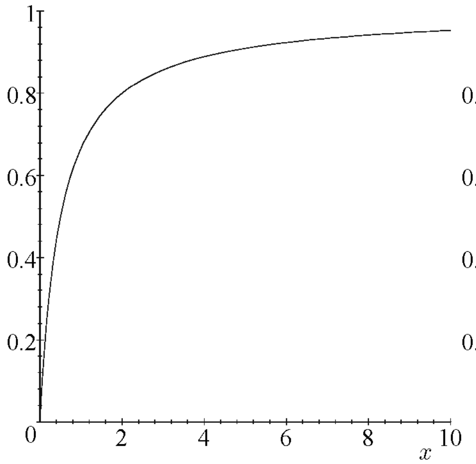
wobei P und Q Polynome sind.

BEISPIEL 5 Bei Enzymreaktionen wird ein Substrat X in ein Produkt P mit Hilfe eines Enzyms E umgewandelt, z.B. eine Gärflüssigkeit in Alkohol durch Hefe. Für die Geschwindigkeit v des Abbaus von X in Abhängigkeit der Substratkonzentration x (bei konstanter Enzymkonzentration) gilt nach Michaelis und Menten (1913)

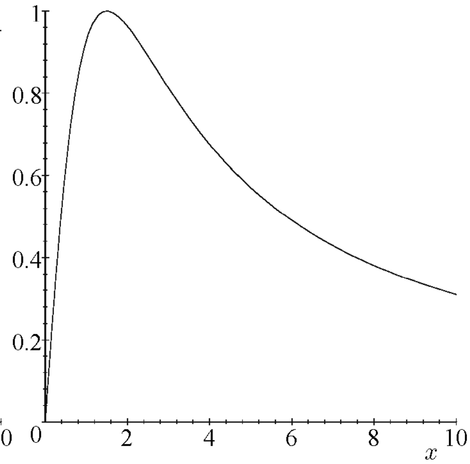
$$v(x) = \frac{Ax}{k + x + Rx^2} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

wobei $A > 0$ die maximal mögliche Abbaugeschwindigkeit, $k > 0$ die Dissoziationskonstante und $R \geqslant 0$ den Grad der Hemmung durch Substratüberschuß angibt. Bei vielen Reaktionen ist R klein gegen 1 , $R \ll 1$ und kann vernachlässigt werden. Dies bedeutet, daß die Wirkung des Enzyms nur wenig von dem Mengenverhältnis Enzym zu Substrat abhängt.

Man erhält z.B. folgende Graphen :



$A = 1$, $k = 0.5$ und $R = 0$



$A = 13$, $k = 9$ und $R = 4$

Betragsfunktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| := \begin{cases} x & \\ & \text{falls} \\ -x & \end{cases} \begin{matrix} 0 \leqslant x \\ \\ x < 0 \end{matrix} .$$

Der Betrag $|x|$ von x gibt den Abstand in $\mathbb{R}$ des Punktes x zum Nullpunkt an.

Umgekehrte Proportionalität.

Für $c \in \mathbb{R}$ betrachtet man die Funktion

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c \cdot \frac{1}{x}$$

Man sagt, daß $f(x)$ *umgekehrt proportional* zu x mit *Proportionalitätskonstante* c ist. Der Graph von f ist durch

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = \frac{c}{x}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \middle|\; x \cdot y = c\right\}$$

gegeben. Es ist eine *Hyperbel* .

BEISPIEL 6 Bei einem idealen Gas ist der Druck p proportional zur Temperatur T und umgekehrt proportional zum Volumen V :

$$p = \frac{C \cdot T}{V} .$$