2.3 Umkehrfunktionen

In dem Michalis-Menten-Modell für Enzymreaktionen ist die Reaktionsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Konzentration x gegeben. In manchen Fällen möchte man jedoch aus einer bekannten Geschwindigkeit v die Konzentration x bestimmen. Dies führt auf die Frage, ob sich x aus v eindeutig bestimmen läßt, und allgemein zu

DEFINITION 1 Eine Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$$

heißt *umkehrbar* , wenn jeder Funktionswert $y \in W_f$ nur einmal auftritt, d.h. es gibt genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$. Bezeichnet man dieses x mit $\overset{-1}{f}(y)$, so wird durch die Vorschrift

$$\overset{-1}{f} : W_f \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \overset{-1}{f}(y)$$

die Umkehrfunktion definiert. Es gilt also dann

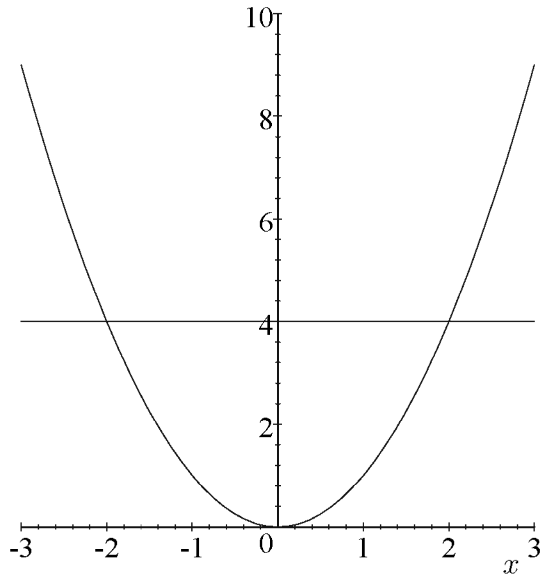
$$y = f(x) \ , \ x \in D_f \quad \Longleftrightarrow \quad x = \overset{-1}{f}(y) \ , \ y \in D_{\overset{-1}{f}} = W_f \ .$$

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $x = \overset{-1}{f}(y)$ ensteht aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$ durch Auflösen nach x .

BEISPIEL 1 Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

ist nicht umkehrbar, da $y = 4$ Funktionswert zu $x = 2$ und $x = -2$ ist.



BEISPIEL 2 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

ist umkehrbar, da

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad x \geqslant 0$$

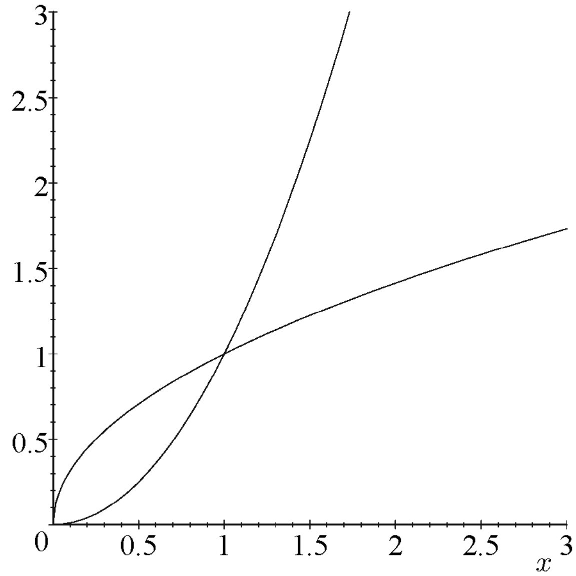
zu

$$x = \sqrt{y} \quad \text{und} \quad y \geqslant 0$$

äquivalent ist. Also ist die Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ von f durch

$$\overset{-1}{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \sqrt{y}$$

gegeben.



BEISPIEL 3 Im Michaelis-Menten Modell (Beispiel 2.2.3) ist die Geschwindigkeitsfunktion v genau dann umkehrbar, wenn $R = 0$ ist, wie eine einfache Rechnung zeigt. Ist $R \neq 0$, so gibt es zu einem gegebenen v i.a. zwei verschiedene Konzentrationen x_1 und x_2 mit $v(x_1) = v = v(x_2)$.

Es gilt

HAUPTSATZ *Sei f eine unkehrbare Funktion.*

(i) Der Graph der Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ von f ensteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

(ii) Eine Wertetabelle von $\overset{-1}{f}$ entsteht aus einer Wertetabelle von f durch Vertauschung der Spalten.

Es gilt

$$(x,y) \in \operatorname{Gr} f \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \overset{-1}{f}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad (y,x) \in \operatorname{Gr} \overset{-1}{f} \ .$$

Die Vertauschung von x und y entspricht die Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

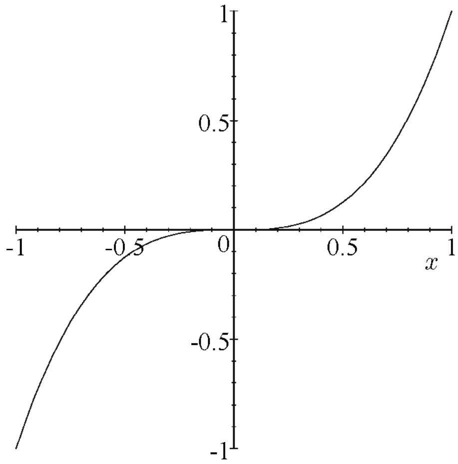
x	$f(x)$
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$

y	$\overset{-1}{f}(y)$
y_1	x_1
y_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$

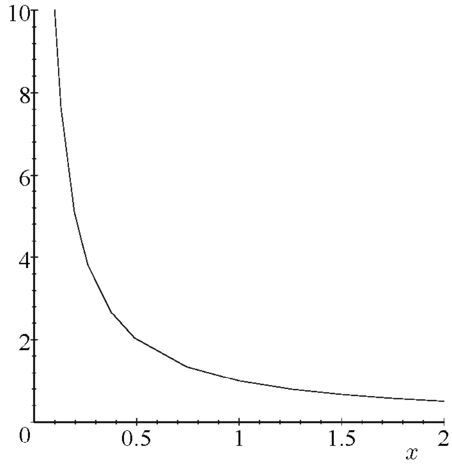
DEFINITION 2 Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* bzw. *fallend* , wenn für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$.

BEISPIEL 4 Die Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3$ ist streng monoton wachsend.

BEISPIEL 5 Die Funktion $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$ ist streng monoton fallend.



$x \longmapsto x^3$



$x \longmapsto \frac{1}{x}$

SATZ *Ist eine Funktion f streng monoton wachsend oder fallend, so ist sie umkehrbar.*