

5.1 Der Begriff des Grenzwertes

An den Messungen der Hefevermehrung (vgl. Beispiel 2.1.1) und dem Michaelis-Menten-Modell der Enzymreaktion (vgl. Beispiel 2.2.3 mit $R = 0$) läßt sich folgendes beobachten: Für große Werte von t bzw. x nähern sich die Funktionswerte $V(t)$ bzw. $v(x)$ einer festen Zahl, dem Grenzwert. Entsprechendes gilt auch für das Diffusionsmodell 1.6.

Die Untersuchung von Grenzwerten, durch die z.B. Gleichgewichtszustände, Sättigung, aber auch, wie wir noch sehen werden, aktuelle Wachstumsraten beschrieben werden, ist für konkrete Anwendungen und als mathematische Begriffsbildung unentbehrlich.

Für die mathematische Beschreibung ist folgende Bezeichnung hilfreich; sie faßt die Fälle, daß x sich einer reellen Zahl nähert oder groß bzw. klein wird, in einer Sprechweise zusammen:

DEFINITION 1 Sei $r > 0$ gegeben. Wir sagen, daß x liegt r -nahe bei

(a) $a \in \mathbb{R}$, falls

$$a - r \leq x \leq a + r,$$

(b) $+\infty$, falls

$$r \leq x,$$

(c) $-\infty$, falls

$$x \leq -r.$$

Wir kommen damit zu der zentralen

DEFINITION 2 Es sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Zahl $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Grenzwert* von $f(x)$ für x gegen $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (oder $f(x)$ strebt gegen b für x gegen a), wenn gilt:

Zu jeder Zahl $r > 0$ (die gewünschte Genauigkeit für die Funktionswerte) existiert eine Zahl $\alpha_r > 0$ (die notwendige Genauigkeit für die Variable) mit folgender Eigenschaft:

Für jedes $x \in D_f$, das α_r -nahe bei a ist, ist $f(x)$ r -nahe bei b .

Wir schreiben dann

$$f(x) \rightarrow b \text{ für } x \rightarrow a$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

oder noch

$$\lim_{x \in D_f, x \rightarrow a} f(x) = b,$$

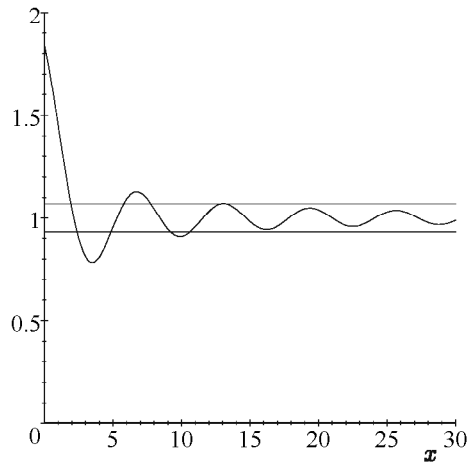
wenn man präzisieren muß.

Will man nicht so genau sein, kann man dies einfach folgendermaßen formulieren:

Ist x nahe genug bei a , so ist $f(x)$ nahe genug bei b .

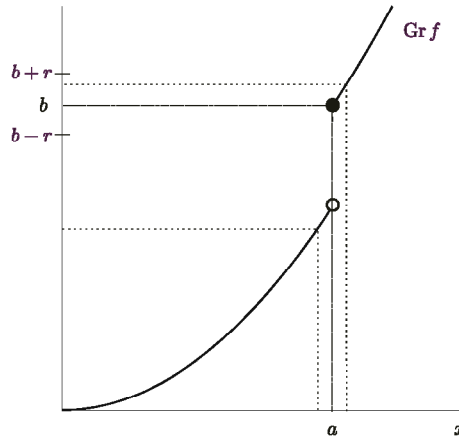
Wir lassen es aber bei einer bildlichen Vorstellung des Grenzwertes bewenden. Die Berechnung von Grenzwerten mittels der strengen Definition ist etwas knifflig. Daher werden wir Grenzwerte ausschließlich aufgrund von Standard Beispielen, der Stetigkeit von Funktionen und Rechenregeln bestimmen.

BEISPIEL 1



$f(x)$ konvergiert gegen 1 für x gegen ∞

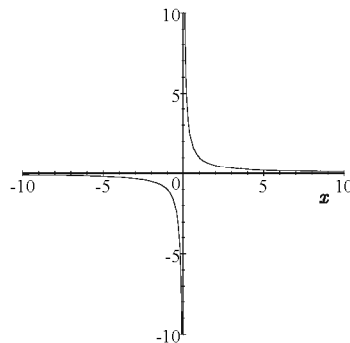
BEISPIEL 2



$f(x)$ konvergiert nicht für x gegen a

5.2 Standardbeispiele für Grenzwerte

Anhand des Graphen der Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$



sind die vier folgenden Beispiele einsichtig.

BEISPIEL 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

BEISPIEL 2

$$\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

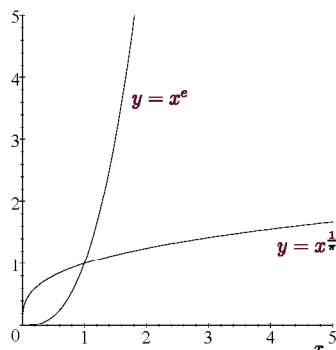
BEISPIEL 3

$$\lim_{x < 0, x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

BEISPIEL 4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Sei $p > 0$ gegeben. Für die Funktion $[0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^p$



sind die folgende zwei Beispiele auch klar.

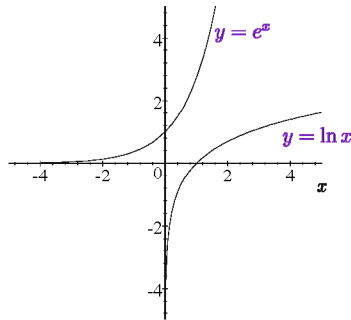
BEISPIEL 5 Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty$$

BEISPIEL 6 Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$$

Die vier nächsten Beispiele sind mit dem folgenden Bild



wiederum einsichtig.

BEISPIEL 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

BEISPIEL 8

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

BEISPIEL 9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

BEISPIEL 10

$$\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

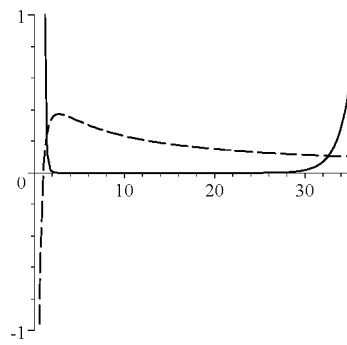
Die Exponential-Funktion wächst viel rascher, die Logarithmus-Funktion viel langsamer als jede Potenzfunktion, d.h.

BEISPIEL 11 Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$$

BEISPIEL 12 Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$



5.3 Rechenregeln für Grenzwerte

SATZ Es seien f, g Funktionen mit $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$, so daß $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) **Faktorregel**

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) .$$

(ii) **Summenregel**

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) .$$

(iii) **Produktregel**

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) .$$

(iv) **Quotientenregel**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} , \text{ falls } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

(v) **Einsetzungsregel** Sei h eine Funktion, so daß $h \circ f$ definiert ist. Falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: b \text{ existiert,}$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} h(y) .$$

BEMERKUNG Dabei ist auch $a = +\infty$ oder $a = -\infty$, sowie uneigentliche Grenzwerte zugelassen, solange in den Regeln (i)-(iv) die rechte Seite noch sinnvoll zu erklären ist: Dabei sei

$$c + \infty = \infty \text{ falls } c \neq -\infty ,$$

$$c - \infty = -\infty \text{ falls } c \neq \infty ,$$

$$c \cdot \infty = \infty \text{ falls } c > 0 ,$$

$$c \cdot \infty = -\infty \text{ falls } c < 0 ,$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0 \text{ falls } c \neq \pm\infty .$$

Die Fälle $\infty - \infty = \infty + (-\infty)$, $\pm\infty \cdot 0$, $\frac{\epsilon}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\infty}$ sind nicht definiert.

BEISPIEL 1 Man könnte hoffen, daß

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \lim_{x \rightarrow \infty} (-x) = \infty - \infty ,$$

aber

$$1 - \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x - x) - \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x) - \lim_{x \rightarrow \infty} x - \infty - \infty .$$

Dies zeigt, daß die Summenregel nicht gilt, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

BEISPIEL 2 Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \cdot e^{-x} = 0 .$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$ nach Beispiel 5.2.11, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^p}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = 0$$

mit Hilfe der Einsetzungsregel und Beispiel 5.2.1.

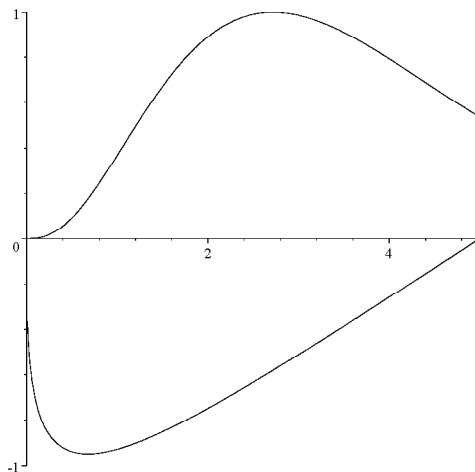
BEISPIEL 3 Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^p \cdot \ln x = 0 .$$

Es gilt $\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ nach Beispiel 5.2.2, also

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^p \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} \right) = -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y^p} = 0$$

mit Hilfe der Einsetzungsregel und Beispiel 5.2.12.



$$x \mapsto x^e \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad x \mapsto \sqrt{\frac{x}{3}} \cdot \ln \frac{x}{5}$$

5.4 Stetige Funktionen

DEFINITION Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig*, falls für alle $a \in D_f$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a),$$

d.h. bei stetigen Funktionen kann man das Limes-Symbol und das Funktionszeichen vertauschen.

BEMERKUNG Etwas vereinfacht läßt sich das so interpretieren, dass sich der Graph von f in einer ununterbrochenen Linie durchziehen läßt.

Alle bisher beschriebenen Funktionen sind stetig :

SATZ *Polynome, rationale Funktionen, die allgemeinen Potenzen, die Exponential- und die Logarithmusfunktion zur Basis a , die trigonometrischen Funktionen \cos , \sin , \tan und ihre Umkehrfunktionen \cos^{-1} , \sin^{-1} , \tan^{-1} sind stetig.*

Stetige Abhängigkeiten einer Größe von einer anderen sind bei Naturvorgängen fast immer gegeben; nur im molekularen Bereich des Mikrokosmos gilt das nicht mehr (natura non facit saltis).

BEISPIEL Die Funktion aus Beispiel 5.1.2 ist in a unstetig.

Man beachte in diesem Fall, daß $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nicht existiert, da

$$\lim_{x > a, x \rightarrow a} f(x) = f(a) \neq \lim_{x < a, x \rightarrow a} f(x).$$

Aus den Grenzwertsätzen läßt sich leicht den folgenden Satz über Stetigkeit folgern:

HAUPTSATZ *Sind die Funktionen f , g und h stetig, so sind die Funktionen*

$$\alpha \cdot f, \quad f + g, \quad f \cdot g,$$

$$\frac{f}{g} : \{x \in D_f \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h \circ f$$

stetig.

Der Begriff der verketteten Funktion (vgl. Definition 2.4.2) macht viele Probleme sehr viel übersichtlicher.

BEISPIEL 1 Die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2}$$

ist stetig als Verkettung von

$$h : y \mapsto e^y \quad \text{und} \quad f : x \mapsto -x^2 ,$$

da

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(-x^2) = e^{-x^2} .$$

BEISPIEL 2 Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

ist stetig als Verkettung von

$$h : y \mapsto \sqrt{y} \quad \text{und} \quad f : x \mapsto 1+x^2 ,$$

da

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(1+x^2) = \sqrt{1+x^2} .$$

5.5 Weitere Beispiele für Grenzwerte

BEISPIEL 1 Für $p < 0$ schreiben wir $x^p = \frac{1}{x^{-p}}$. Es ist $(-p) > 0$ und damit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{-p}} \stackrel{\text{S. 5.3.iv}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-p}} \stackrel{\text{Bsp. 5.2.5}}{=} \frac{1}{\infty} = 0.$$

BEISPIEL 2 Durch Ausklammern der höchsten Potenz erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax}{k+x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A}{\frac{k}{x} + 1} \stackrel{\text{S. 5.3, iv, ii und i}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} A}{k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1} = \\ &\stackrel{\text{S. 5.4 und Bsp. 5.2.1}}{=} \frac{A}{k \cdot 0 + 1} = A. \end{aligned}$$

BEISPIEL 3 Falls $R > 0$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax}{k+x+Rx^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{A}{x}}{\frac{k}{x^2} + \frac{1}{x} + R} = \\ &\stackrel{\text{S. 5.3, iv, ii, i und iii}}{=} \frac{A \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{k \cdot (\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x})^2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + R} \stackrel{\text{Bsp. 5.2.1}}{=} \frac{A \cdot 0}{k \cdot 0^2 + 0 + R} = \frac{0}{R} = 0. \end{aligned}$$

BEISPIEL 4 Da $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -(\lim_{x \rightarrow \infty} x)^2 = -\infty^2 = -\infty$, folgt mit der Variablenänderung $y = -x^2$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} \stackrel{\text{S. 5.3.v}}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \stackrel{\text{Bsp. 5.2.8}}{=} 0.$$

BEISPIEL 5 Es sei $a \geq -1$. Da nach Satz 5.4 das Polynom $x \mapsto 1+x$ stetig ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} (1+x) = (1+a).$$

Mit der Variablenänderung $y = 1+x$ erhält man

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{1+x} = \lim_{y \rightarrow 1+a} \sqrt{y} = \sqrt{1+a}$$

da $y \mapsto \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ als allgemeine Potenz stetig ist. Man hätte auch folgendermaßen argumentieren können. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{1+x}$, als Verkettung der stetigen Funktionen

$$x \mapsto 1+x \quad \text{und} \quad y \mapsto \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}},$$

ist stetig nach Hauptsatz 5.4 und somit gilt die Behauptung nach Definition der Stetigkeit.