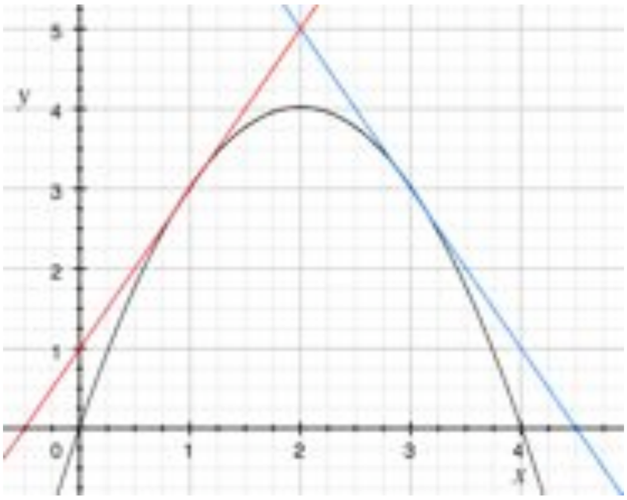
Beispielaufgabe

Berechne die Tangenten an den Graphen von $f(x)=-x^2+4x$ durch den Punkt $P(2/5)$.

1. Schritt: Skizze

Durch Nullsetzen von f(x) bekommt man die Nullstellen $x_1=0$ und $x_2=4$. Da eine Parabel vorliegt, ist der Graph achsensymmetrisch bzgl. einer Senkrechten durch den Scheitel. Der Scheitel hat somit die x-Koordinate 2 und die y-Koordinate f(2)=4.



2. Schritt: Berührpunkte

Mögliche Berührpunkte liegen auf dem Graphen. Hat der Berührpunkt zum Beispiel die x-Koordinate u (u wird hier genommen, da man ja noch nicht weiß wo der Punkt sein wird), so hat er die y-Koordinate $f(u)=-u^2+4u$:

$$\mathbf{B(u|-u^2+4u)}$$

3. Schritt: Vergleich der Steigungen

Man vergleicht nun die Steigung der Geraden durch B und P (Steigungsdreieck) mit der lokalen Steigung in B (1. Ableitung):

Steigungsdreieck: $\frac{5-(-u^2+4u)}{2-u} = \frac{5+u^2-4u}{2-u}$

Lokale Steigung: $f'(u) = -2u+4$

Diese Steigungen müssen gleich sein:

$$\frac{5+u^2-4u}{2-u} = -2u+4$$
$$0 = u^2-4u+3 = (u-3)(u-1)$$

Für $u_1=1$ und $u_2=3$ würde die Steigung der Geraden durch B und P mit der Tangentensteigung in x=1 und x=3 übereinstimmen.

4. Schritt: Bestimmten der Berührpunkte

Wegen $B(u|-u^2+4u)$ und $u_1=1$ und $u_2=3$ erhält man die Berührpunkte $B_1(1|3)$ und $B_2(3|3)$.

5. Schritt: Aufstellen der Tangentengleichungen

Mit Hilfe der ersten Ableitung und den gegebenen Berührpunkten lassen sich die Gleichungen aufstellen: $y=-2x+9$ und $y=2x+1$.