

Der Turm von Hanoi

1. Schritt

Die Ausgangsposition. Der aus drei Scheiben bestehende Turm steht auf Platz 1.



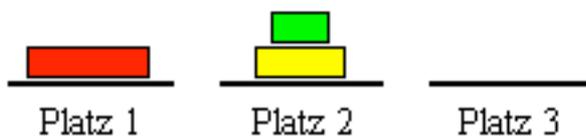
Im ersten Schritt legen wir die oberste Scheibe auf Platz 3.



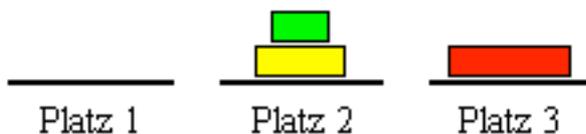
Nun legen wir die mittlere Scheibe auf Platz 2.



Die kleinste Scheibe kommt auf Platz 2. Dies ist erlaubt, denn schließlich liegt sie auf einer größeren Scheibe.



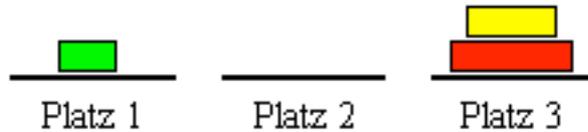
Jetzt legen wir die unterste Scheibe von Platz 1 nach Platz 3 - kein Problem, denn Platz 3 ist leer.



Nun kommt die kleinste Scheibe auf den leeren Platz 1.



Wir sind kurz vor dem Ziel. Die mittlere Scheibe wechselt von Platz 2 nach Platz 3. Das ist okay, denn sie ist kleiner als die schon dort befindliche Scheibe.



Der letzte Zug legt die kleinste Scheibe auf Platz 3. Voilà - wir konnten einen Turm der Höhe 3 von Platz 1 auf Platz 3 legen.



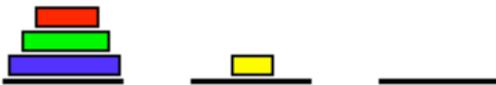
Es wäre doch sicher auch möglich gewesen, den 3-er Turm von Platz 1 nach Platz 3 zu verlegen? Klar, wir hätten die gleiche Strategie wie oben anwenden können, nur daß Platz 3 und Platz 2 die Rolle vertauscht hätten. Jedesmal, wenn von Platz 3 die Rede war, hätten wir stattdessen konsequent Platz 2 verstanden und umgekehrt. Um das wirklich zu *begreifen*, solltest Du die Strategie von oben einfach durchführen und vertausche dabei konsequent die Worte "Platz 2" und "Platz 3". Du schaffst es dann, den Turm der Höhe 3 von Platz 1 nach Platz 3 umzubauen.

2. Schritt

Die Startaufstellung.



Schritt 1: Die oberste Scheibe wandert auf den mittleren Platz.



Schritt 2: Die zweitkleinste Scheibe auf Platz 3.



Schritt 3: Die kleinste Scheibe wandert auf Platz 2.



Schritt 4: Die zweitgrößte Scheibe wandert auf den mittleren Platz.



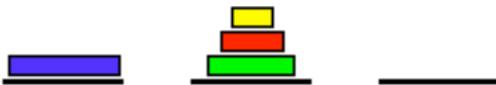
Schritt 5: Die kleinste Scheibe nach Platz 1.



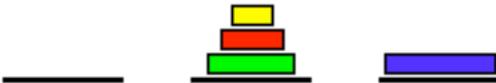
Schritt 6: Die zweitkleinste Scheibe wandert auf den mittleren Platz.



Schritt 7: Die kleinste Scheibe wandert auf den Platz 2. (Ein 3-er Turm auf Platz 2).



Schritt 8: Die größte Scheibe wandert von Platz 1 nach Platz 3.



Schritt 9: Die kleinste Scheibe wird auf Platz 3 abgelegt.



Schritt 10: Die zweitkleinste Scheibe auf Platz 1.



Schritt 11: Die kleinste Scheibe wandert von Platz 3 auf Platz 1.



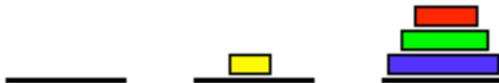
Schritt 12: Die zweitgrößte Scheibe hüpft auf Platz 3.



Schritt 13: Die kleinste Scheibe geht auf Platz 2.



Schritt 14: Die zweitkleinste Scheibe wandert von Platz 1 auf Platz 3.



Schritt 15: Die kleinste Scheibe wandert auf Platz 3. Der Turm ist versetzt.



In den Schritten 1-7 haben wir den 3-er Turm, der aus den obersten 3 Scheiben besteht, von Platz 1 auf Platz 2 umgebaut. Daß dies möglich war, wußten wir ja bereits aus den Überlegungen zum 3-er Turm. Im Schritt 8 haben wir die größte Scheibe von Platz 1 auf den freien Platz 3 gelegt. In den Schritten 9-15 haben wir dann den 3-er Turm von Platz 2 nach Platz 3 gelegt. Wir wußten natürlich schon, daß dies möglich war.

Zusammenfassung

Aussage 3: Ein 3-er Turm kann von Platz 1 nach Platz 3 oder nach Platz 2 umgebaut werden, ebenso von Platz 2 nach Platz 3!

Die Argumentation für den 4-er Turm besteht aus folgenden Schritten:

Überlegung 0: Wir betrachten die obersten drei Scheiben des 4-er Turms als 3-er Turm.

Überlegung 1: Wegen Aussage (3) können die obersten 3 Scheiben des 4-er Turms nach Platz 2 umgebaut werden.

Überlegung 2: Die größte Scheibe kann von Platz 1 nach Platz 3 umgelegt werden.

Überlegung 3: Wegen Aussage (3) können die 3 Scheiben von Platz 2 nach Platz 3 umgebaut werden.

Ergebnis: Ein 4-er Turm kann von Platz 1 nach Platz 3 umgebaut werden!

Aussage 4: Ein 4-er Turm kann von Platz 1 nach Platz 3 oder nach Platz 2 umgebaut werden, ebenso von Platz 2 nach Platz 3!

Überlegung 0: Wir betrachten die obersten vier Scheiben des 5-er Turms als 4-er Turm.

Überlegung 1: Wegen Aussage (4) können die obersten 4 Scheiben des 5-er Turms nach Platz 2 umgebaut werden.

Überlegung 2: Die größte Scheibe kann von Platz 1 nach Platz 3 umgelegt werden.

Überlegung 3: Wegen Aussage (4) können die 4 Scheiben von Platz 2 nach Platz 3 umgebaut werden.

Ergebnis: Ein 5-er Turm kann von Platz 1 nach Platz 3 umgebaut werden!

Aussage 5: Ein 5-er Turm kann von Platz 1 nach Platz 3 oder nach Platz 2 umgebaut werden, ebenso von Platz 2 nach Platz 3!

Aussage 6: Ein 6-er Turm kann von Platz 1 nach Platz 3 oder nach Platz 2 umgebaut werden, ebenso von Platz 2 nach Platz 3!

Jeder Turm kann unter Beachtung der Regeln umgebaut werden!

Das Prinzip der vollständige Induktion

1. Für einen konkreten Turm habe ich den Umbau durchgeführt.

Eine Aussage habe ich als wahr bewiesen.

2. Ich kann nachweisen: Wenn ein Turm aus n -Steinen umgebaut werden kann, dann auch ein Turm mit einem Stein mehr.

Wenn die Aussage (n) wahr ist, dann auch die Aussage ($n+1$).

Anzahl der Spielzüge und Dauer des Spiels

Um den 4-er Turm umzubauen

- bauen wir die obersten drei Scheiben nach Platz 2 (7 Züge)
- legen wir die unterste Scheibe nach Platz 3 (1 Zug)
- bauen wir die 3 Scheiben von Platz 2 nach Platz 3 (7 Züge)

Ergebnis: $7 + 1 + 7 = 15$ Züge sind zum Umbau notwendig

3-er Turm: 7 Züge = $2^3 - 1$ Züge

4-er Turm: 15 Züge = $2^4 - 1$ Züge

Für einen Turm aus n Scheiben brauchen wir $2^n - 1$ Züge zum Umbau von Platz 1 nach Platz 3.

Für einen Turm von 64 Scheiben braucht man bei einem Zug pro Sekunde:

18.446.744.073.709.551.615 Sekunden

=

584.942.417.400 Jahre

Lösungsstrategie für n Scheiben

Rekursiv (Sich selbst aufrufend)

1. - Versetze $n-1$ Scheiben nach (2)
- Setze Scheibe n nach (3)
- Versetze $n-1$ Scheiben von (2) nach (3)
Für das Versetzen der $n-1$ Scheiben benutzt du auch diesen Ablauf.

Iterativ

2. - Lege die kleinere Scheibe auf den im Uhrzeigersinn nächsten Stab
- Versetze die nächste Scheibe auf den freien Stab.