Geschichtliche Bezüge
im
Mathematikunterricht

Ingo Bartling

Studienseminar Februar 1998/2000
Friedrich-Dessauer Gymnasium · Schulzentrum · D-63741 Aschaffenburg

10. Mai 1999

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Überblick

Oft wird gesagt, dass die Geschichte der Mathematik es den Schülern leichter macht, den Stoff zu verstehen. In wieweit dies stimmt, soll in dieser Abeit anhand einiger Beispiele daregstellt werden.

Im folgenden soll ein Überblick gegeben werden, in welchen Klassenstufen Bezug auf die Geschichte der Mathematik genommen werden kann. Die Wahlpflichtgebiete wurden nicht beachtet, da sonst der Rahmen der Arbeit gesprengt werden würde. Es wurden daher in der 12. und 13. Klassenstufe nur einige wenige Punkte herausgegriffen.

Klassenstufe	Unterrichtsinhalt	Geschichtliche Bezüge
5	Römisches Zahlensystem,	
	Dualsystem,	Leibniz
	Rechnen mit Größen	Erste Zahlzeichen
	Primzahlen	Eratosthenes
	Pyramide (Modelle),	Ägypter
	Flächenmessung	Ägypter(Feldvermessung)
6	Bruchrechnung	Griechenland: Platon
	Winkel	Babylonier, Sexagemisalsystem
	Thaleskreis	Thales
7	Textaufgaben	Adam Ries
8	Fasskreisbogen	Enstehung des Namens
	Konstruktion von n-Ecken	Gauß
9	Irrationale Zahlen	Entstehung
	Satz von Pythagoras	Pythagoras
	Pyramidenstumpf	Ägypter
	Goldener Schnitt	Renaissance
	Platonische Körper	Platon, Kepler (Weltensystem)
10	Logarithmen	Seefahrt und Astronomie:
		Neper, Bürgi, Briggs, Kepler
	π	Buch der Könige, Kap. 7, Vers 23
		Hippokrates, Eratosthenes,
		Archimedes, Ludolf van Ceulen,
		Leonard Euler, F. Lindemann
11	Reelle Funktionen	Leibniz, Bernoulli
	Differenzialrechnung	Leibniz, Newton
12	Integralrechnung	Leibniz, Newton, Riemann
	Zufallsrechnung	Laplace
	Bernoulli-Experiment	Jakob Bernoulli
	Binomialverteilung	Francis Galton
	Differenzengleichung	Leonardo von Pisa
	Differentialgleichung	Augustin-Louis Cauchy
	Lineare Gleichungssysteme	Gauß
13	Gesetz der großen Zahlen	Jakob Bernoulli

Exemplarisch werden in den nächsten Kapiteln einige Gebiete herausgegriffen und ihre geschichtliche Entwicklung skizziert. Zu vielen Gebieten wird in Schulbüchern der geschichtliche Hintergrund bereits dargestellt. Die Schwerpunkte dieser Arbeit bilden daher mathematische Gebiete zu denen weniger in Schulbüchern geschrieben wird. Zum Abschluss werden Überlegungen dargestellt, wie die Geschichte der Mathematik im Unterricht präsentiert werden kann.

2 Zahlen

Wenn man von der Steinzeit absieht, in der nur eine empirische Vorform der Mathematik auftrat, beginnt das mathematische Denken ungefähr im Jahr 2000 vor Christus im vorderen Orient. Inwieweit sich die vorher lebenden Maya bereits mit Mathematik auseinandersetzten, ist leider nicht bekannt.

2.1 Zahlensysteme

2.1.1 Die Anfänge

Die erste Etappe auf dem Weg zum Zahlbegriff war das Erkennen solcher Unterschiede wie „Viel“ und „Wenig“, die begriffliche Unterscheidung von „Eins“ und „Viel“. Daraus scheinen Zweier- und Dreiersysteme enstanden zu sein. Noch heute benutzen Stämme Australiens, Südamerikas und Südafrikas das Zweiersystem.

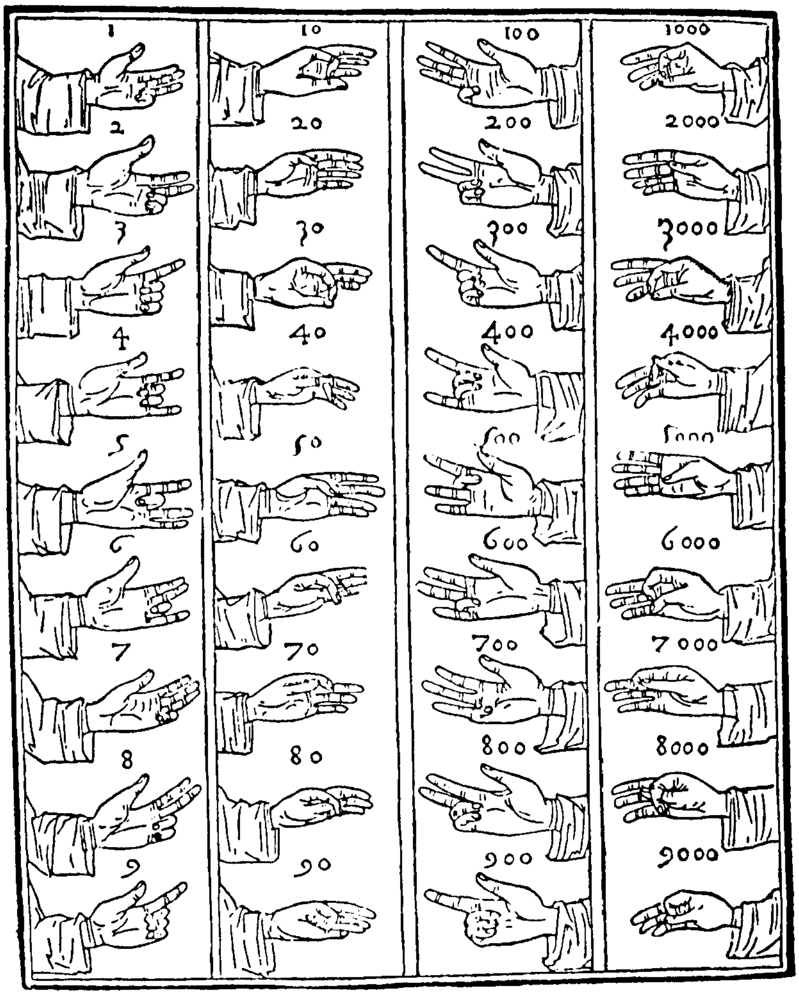

Abb. 1: Fingerzählen in einer deutschen Veröffentlichung, 1727.

Obwohl der Mensch am Anfang nur wenige Zahlenwerte kannte, konnten doch große Zahlen gebildet werden. So zum Beispiel für das Zählen einer Viehherde: Die erste Person zählte mit den Fingern die vorbeilaufenden Tiere ab, die zweite Person zählte mit den Fingern, wie oft bei dem ersten beide Hände voll waren. Diese Technik wurde später weiter ausgebaut und es enstanden Darstellungen von Zahlen mit Hilfe der Finger als Bestandteil des Fingerrechnens. Bis in das 18. Jhr. hinein wurde diese Technik angewendet.

Anfangs waren die benutzen Zahlworte von den gezählten Gegenständen abhängig, d. h. die Einheit war in den Zahlen mitenthalten. Die Fidschi-Insulaner sagen „bole“ für 10 Kähne, aber „karo“ für 10 Kokosnüsse.

Einen historischen Schritt stellte die Zuordnung zwischen verschiedenen konkreten Mengen mit einer Repräsentationsmenge dar: 5 Finger, 10 Finger, 20 Finger und Zehen, 12 Knöchel. Die Azteken zählten zur Basis 5, die Ägypter zur Basis 10, die Kelten zur Basis 20. Reste davon gibt es z. B. in der französischen und dänischen Sprache (franz.: $80 = 4 \cdot 20$, quatre-vingt).

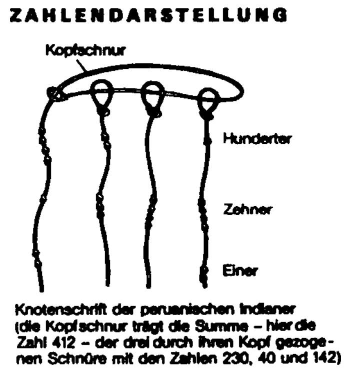

Abb. 2: Darstellung von 412 in der peruanischen Knotenschrift.

2.1.2 Babylon

Das Zweistromland Mesopotamien zwischen Euphrat und Tigris wurde in seinem südlichen Teil etwa seit 3500 v. Chr. von dem kuturell hochstehenden Volk der Sumerer bewohnt. Um 2200 v. Chr. wurde sie von den aus dem Norden heranrückenden Babylonier unterworfen.

Die Zeichen der Babylonier wurden mittels eines Griffels in weichen Ton gedrückt, so dass eine Keilschrift entstand. Durch das Brennen der Tafeln wurde diese sehr haltbar.

Das babylonische Zahlsystem ist ein Sexagesimalsystem (System zur Basis 60) mit zwei Individualzeichen: Einem Keil für die 1 und einem Winkelhaken für die 10.

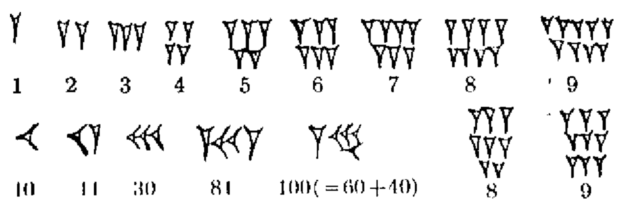

Abb. 3: Darstellung von Zahlen in Keilschrift.

Da die 1 bis zu neunmal und die 10 bis zu fünfmal aneinandergereiht wird, lassen sich alle Zahlen bis 59 darstellen. Die 60 erscheint dann wieder als Keil. Das babylonische System war also ein Positionssystem ohne Null.

Das Sexagesimalsystem zeichnet sich gegenüber dem Dezimalsystem der Ägypter dadurch aus, dass die Basis 60 eine große Zahl an Teilern besitzt, so dass alle Multiplikationen bequem durchgeführt werden konnten. Die heutige Einteilung der Stunde und des Winkelgrades in Minuten und Sekunden geht auf die Babylonier zurück.

2.1.3 Ägypten

Die wichtigsten Urkunden für die heutigen Kenntnisse der Mathematik der alten Ägypter sind: der um 1850 aufgefundene Papyrus Rhind und der Papyrus Moskau. Diese Urkunden erhalten elementare arithmetische und geometrische Aussagen in Form von Beispielsammlungen.

Die Mathematik war für die Ägypter noch keine Wissenschaft, sondern ein Hilfsmittel für Verwaltung und Wirtschaft. So trat der Nilstrom alljährlich über die Ufer und zerstörte dabei die Grenzmale der Grundbesitzer. Daher waren ständig Landmessungen (Geometrie: Erdmessung) nötig.

Die Ägypter schrieben die Zahlen zunächst in der Bilderschrift der Hieroglyphen auf. Es waren Individualzeichen, deren Fortschreiten zwar dezimal, jedoch ohne Stellenwert war. So wurden große zusammengesetzte Zahlen additiv geschrieben:

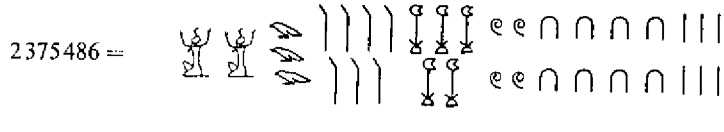

Abb. 4: Darstellung der Zahl 2375486 in Hieroglyphen.

Die Hieroglyphen fanden im Laufe der Entwicklung fast nur noch bei repräsenativen Inschriften Verwendung. Man ging zu Kursiven über, den hieratischen (priesterlichen) und demotischen (volkstümlichen) Symbolen. Später wurden weitere Individualzeichen eingeführt.

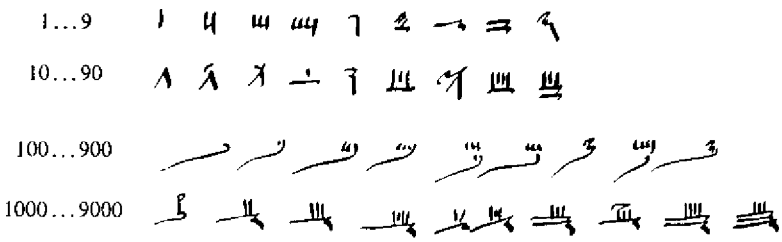

Abb. 5: Hieratische Zahlzeichen.

Wie die gesamte vorgriechische Mathematik, kannten auch die Babylonier noch keinen mathematischen Beweis. Allerdings war die Mathematik der Babylonier der der Ägypter um einiges voraus. Das Zahlensystem und die Rechenverfahren der Babylonier sind in höherem Maß durchdacht und arithmetisiert. Bei nicht aufgehenden Algorithmen weiß man sich durch Näherungsverfahren zu helfen und geometrische Aussagen werden auf algebraische zurückgeführt.

2.1.4 Griechenland

Es gibt die Herodianischen Blockzeichen

$$1 = \mathrm{I},\quad 2 = \mathrm{II},\quad 3 = \mathrm{III},\quad 4 = \mathrm{IIII},\quad 5 = \Gamma\,,$$
$$10 = \Delta,\quad 100 = \mathrm{H},\quad 1000 = \mathrm{X},\quad 10000 = \mathrm{M}\,.$$

Abb. 6: Herodianische Zahlzeichen.

Diese sind erst seit 95 v. Chr. amtlich zugelassen, können aber seit 554 v. Chr auf Inschriften gefunden werden. Sie wurden überwiegend bei gesetzlichen und repräsentaiven Zwecken verwendet. Die Zeichen werden aneinandergereiht, wobei die 5 meist einen Einschnitt darstellt. Die Griechen haben ebensowenig wie ihre Vorgänger eine Null und nicht einmal ein Positionssystem.

$$50 = \overline{|\Delta};\quad 5000 = \overline{|\mathrm{X}};\quad 4637 = \mathrm{XXXX}\overline{|\mathrm{H}}\mathrm{H}\Delta\Delta\Delta\mathrm{IIII}\,.$$

Abb. 7: Beispiel für die Anwendung der Herodianischen Zahlzeichen.

Da bei diesen Individualzeichen nur eine Reihung vorgesehen war, waren sie den Anforderungen der Arithmetik nicht gewachsen.

Um 450 v. Chr. kamen weitere Zeichen in der Stadt Milet auf. Diese milesischen Zeichen wurden seit 300 v. Chr. ständig benutzt, sowohl im privaten als auch im wissenschaftlichen Gebrauch. Die milesischen Zeichen knüpfen an das griechische Alphabet an und werden durch die drei alten Ergänzungszeichen Stigma („6“), Koppa („90“) und Sampi („900“) vermehrt. Der Querstrich symbolisiert die Buchstaben als Zahlen. Tausender werden durch einen links unten angebrachten Strich bezeichnet, Zehntausender durch ein vorangestelltes $M\nu$. Der Zahlentheorotiker Diophant (um 250 n. Chr.) trennte häufig die Zehntausender von den Tausendern durch einen Punkt ab.

$$1 = \alpha,\ 2 = \beta,\ 3 = \gamma,\ 4 = \delta,\ 5 = \varepsilon,\ 6 = \varsigma,\ 7 = \zeta,\ 8 = \eta,\ 9 = \vartheta,$$
$$10 = \iota,\ 20 = \varkappa,\ 30 = \lambda,\ 40 = \mu,\ 50 = \nu,\ 60 = \xi,\ 70 = o,\ 80 = \pi,\ 90 = \text{ϙ},$$
$$100 = \varrho,\ 200 = \sigma,\ 300 = \tau,\ 400 = \upsilon,\ 500 = \varphi,\ 600 = \chi,\ 700 = \psi,\ 800 = \omega,$$
$$900 = \text{ϡ}.$$

Abb. 8: Milesische Zahlzeichen.

$$192 = \overline{\varrho \text{ϙ} \beta}; \quad 3007 = ,\overline{\gamma\zeta}; \quad 46530 = \overset{\delta}{M}, \varsigma\varphi\lambda\,.$$
$$\overline{\tau\varsigma.,\vartheta} = 3069000.$$

Abb. 9: Beispiel für die Anwendung der Milesischen Zahlzeichen.

2.1.5 Entwicklung der heutigen Zahlenschreibweise

Unsere heutige Ziffernschreibweise stammt eigentlich aus Indien. Durch die Übermittlung der Araber gelangte die indische Ziffernschreibweise in den abendländischen Kulturkreis. Wir sprechen somit fälschlich von einer arabischen Ziffernschreibweise.

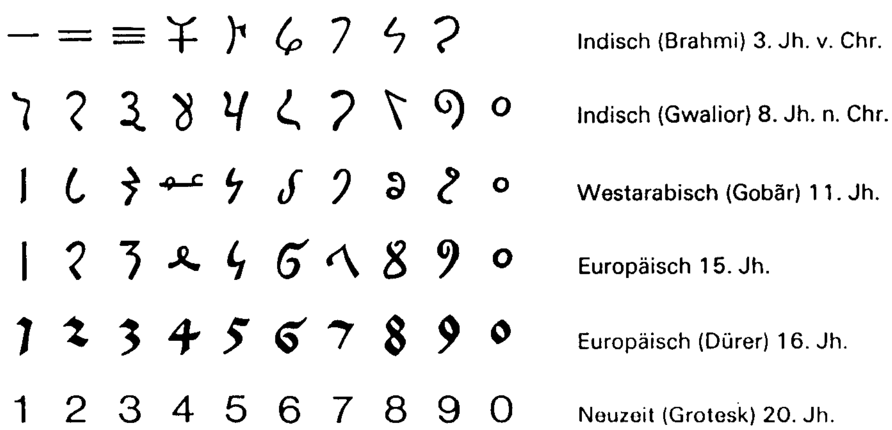

Abb. 10: Entwicklung der heutigen Ziffern.

Als Anfang einer Ziffernschreibweise läßt sich die ägyptische Darstellung benutzen. Die Zahlen 1 bis 9 werden durch Striche dargestellt und für 10, 100, 1000 werden neue Symbole benutzt, die ebenfalls bis zu einer Anzahl von neun neben- oder übereinander stehen können.

Mehr als drei oder vier Striche zu machen, ist jedoch unbequem. So wurden schon in der hieratischen Schrift der Ägypter von der Zahl 4 an neue Zeichen eingeführt; bei den Griechen im alten Sytstem und bei den Römern von 5 an.

Die Zeichen für höhere Zehnerpotenzen werden nicht mehrfach angeschrieben, sondern es wird entweder die Wiederholung angedeutet (hieratische Schrift) oder es wird, wie z. B. in der chinesischen Schrift die Anzahl der Zeichen angegeben.

Schließlich werden die Zehnerpotenzen nicht mehr hingeschrieben, sondern sind an der Stelle zu erkennen(Positionssystem). Das Abzählen der Stellen ist bereits bei den Babyloniern und Chinesen möglich, da sich dort die Symbole abwechseln bzw. für die Zahlen 1 bis 9 nur ein Zeichen benutzt wird.

Individualzeichen für 1 bis 9 und später auch für die Null setzen sich bis zum

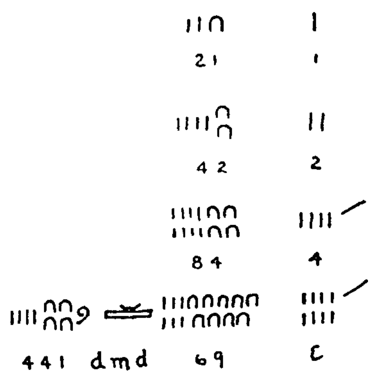

Abb. 11: Berechnung von 12 · 12 im Papyrus Rhind.

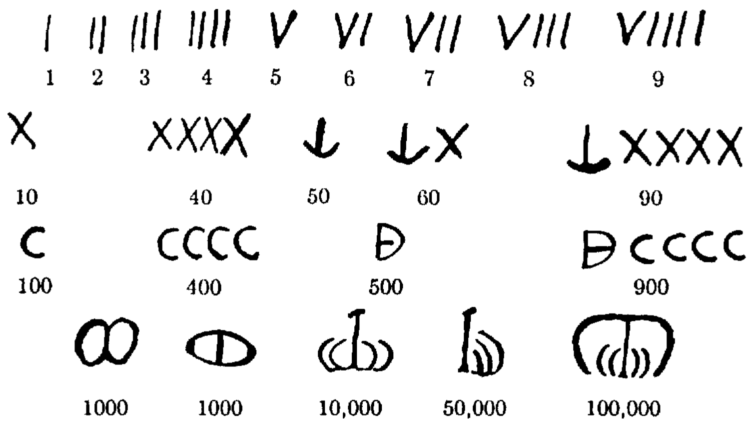

Abb. 12: Zahlzeichen der Römer.

6. Jhr. n. Chr. durch, wenn man von der Schreibweise der Ägypter absieht. Eine Zwischenstufe bildet das System der Griechen, bei dem die Zahlen mit Hilfe von Buchstaben dargestellt wurden.

2.2 Besondere Zahlen

Schon früh spielten einige Zahlen eine besondere Rolle, so vor allem die Zahl π. Aber auch die Null, die eulersche Zahl e, Primzahlen und irrationale Zahlen hatten eine Sonderrolle und wurden sogar teilweise erst spät als Zahlen akzeptiert.

Da die großen zahlentheoretischen Probleme zum Teil sehr leicht zu formulieren sind, eignen sie sich gut dafür, beim Schüler Interesse für die Mathematik zu wecken. An ungelösten Problemen (Primzahlzwillingen) kann man den Schülern sehr gut zeigen, dass es in der Mathematik noch viel zu erforschen gibt.

2.2.1 Die Zahl π

Die drei klassischen Probleme der Antike waren

- Die Dreiteilung des Winkels.
- Die Verdopplung des Würfels.
- Die Quadratur des Kreises.

Das Quadraturproblem des Kreises läuft im wesentlichen auf die Bestimmung der Zahl π hinaus. Also das Bestimmen des Verhältnisses von Umfang und Druchmessers eines Kreises.

In der antiken Hochkultur des Orients nahm man für π häufig den Wert 3 an. Im Papyrus Rhind findet man jedoch schon den Wert $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1604$ und auf einer babylonischen Tontafel $3\frac{1}{8} = 3,125$. In der Bibel findet man den Wert 3:

> Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern
> zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur
> von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.
> Buch der Könige, Kap. 7, Vers 23.

All diese Werte wurden wahrscheinlich empirisch aufgestellt. Erst Archimedes unternahm einen ersten wissenschaftlich ernstzunehmenden Versuch, „die klassische Methode zur Berechnung von π“. Er näherte den Kreis durch regelmäßige n-Ecke von innen und außen an und erhielt für die 96-Ecke den Wert 3,14. Die Genauigkeit wurde mit Hilfe von Computern auf über eine halbe Millionen Stellen gesteigert (siehe Kaiser, S. 145 - 148).

Die heute übliche Bezeichnung hat sich nur langsam durchgesetzt. Erst der Schriftsteller Wiliam Jones benutzte π als Symbol in unserem heutigen Sinn und Euler brachte 1737 das Symbol π in den allgemeinen Gebrauch. Die Irrationalität wurde 1767 von Johann Heinrich Lambert gezeigt, die Transzendenz bewies 1882 F. Lindemann.

Ende des vorigen Jahrhunderts entstanden eine Reihe von π-Gedichten, von denen zwei hier wiedergegeben werden:

> Wie, o dies π
> Macht ernstlich so vielen Müh'!
> Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
> Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!

> How I want a drink, alcoholic of course,
> after the heavy lectures involving quantum mechanics.

2.2.2 Die Null

Eine Zahl in einem Positionssystem wie es die Babylonier hatten, ist nur eindeutig, wenn auch ein Zeichen für eine Lücke vorhanden ist. Bei den meisten Zahlen wird die Mehrdeutigkeit dadurch vermieden, dass für Einer und Zehner verschiedene Symbole benutzt werden. Die Babylonier benutzen aber auch schon ein Lückenzeichen in Form zweier kleiner Winkelhaken.

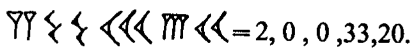

Abb. 13: Zwei Winkelhaken als Null.

Die Inder trauten dem geschriebenen Wort nur wenig, sondern verließen sich eher auf das Gedächtnis. Sie fassten daher mathematische Probleme und Lösungen in Gedichtfrom und fassteb Zahlen in Symbolen: So wurde etwa 1 mit „Mond“ und 3 mit „Brüder“ belegt.

Die am schwierigsten zu verstehende Zahl war die Null. Man nimmt an, dass die Inder den kleinen runden Kreis von den Griechen übernommen haben und in ihre dezimale Schreibweise einbauten. Das Zeichen für Null ist vielleicht der Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes für „nichts“ (ouden). Aber auch die Schreibweise der Null als Punkt kam vor.

Die Inder hatten damit als erste ein vollwertiges Stellensystem. Über die Araber kam die Null in den islamischen Kulturkreis.

Der Name Null entstand genauso schwierig, wie seine mathematische Bedeutung. Aus dem Arabischen „sifr“ entstanden die Begriffe „ciffra“, „chiffre“ und später „Ziffer“, aber auch das englische „zero“. Der Name Null entstand wahrscheinlich aus der Vorstellung, das die Null das Nichts darstellt: „nulla figura“, keine reelle Figur.

2.2.3 Primzahlen

Der Begriff der Primzahl war schon Euklid bekannt.

- (Buch 7, § 30) Wenn eine Primzahl ein Produkt misst, muss sie auch einen der Faktoren messen.
- (Buch 9, § 14) Jede Zahl ist entweder Primzahl oder wird von irgendeiner Primzahl gemessen.
- (Buch 9, § 20) Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

In seiner Proposition 20 vom Buch 9 der „Elemente“ gibt er den berühmten indirekten Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen an.

Euler fand einen ganz anderen Beweis: Nach der Summenformel für die unendliche geometrische Reihe gilt für jede Primzahl p:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{p^v}.$$

Angenommen, es gäbe nur Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$, so wäre

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdots \frac{1}{1-\frac{1}{p_r}} = \sum_{v_1,\ldots,v_r=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

da nach dem Produktsatz für unendliche Reihen konvergente Reihen mit positiven Gliedern gliedweise ausmultipliziert und umgeordnet werden können. Außerdem lässt sich jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen. Da aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, entsteht ein Widerspruch.

Ein ungelöstes Problem ist die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt oder nicht. Primzahlzwillinge sind dabei Paare von Primzahlen der Gestalt $p, p+2$.

Ein weiteres ungelöstes Problem stellt die Vermutung von C. Golbach dar, die er 1742 in einem Brief an Euler aufstellte: Jede gerade Zahl mit Ausnhame der 2 und 4 kann als Summe zweier ungerader Primzahlen dargestellt werden. Immerhin konnte 1937 Vinigradow beweisen, dass jede ungerade Zahl $> 3^{3^{15}}$ als Summe von drei ungeraden Primzahlen dargestellt werden kann.

Die meisten dieser Beweise können im Unterricht leider nicht behandelt werden, da sie zu kompliziert sind. Dies kann aber dazu benutzt werden, den Schülern zu zeigen, wie kompliziert anscheindend einfache Dinge zu beweisen sind. Denn oftmals sehen Schüler nicht ein, warum doch „offensichtliche“ Dinge bewiesen werden müssen.

3 Geometrie in Ägypten

Der Papyrus Rhind ist ein Lehrbuch für den Grundkurs der höheren Mathematik. Es werden lineare Gleichungen mit einer Unbekannten gelöst und grundlegende Flächen und Volumina berechnet. Das Papyrus Moskau zeigt, dass man auf dieser Basis weitergearbeitet hat. Die mathematischen Kenntnisse werden als Rechenvorschriften dargestellt, wobei die Ergebnisse durch eine Probe kontrolliert werden. Es gibt aber keinen Hinweis, ob jemals gefragt wurde, warum ein Ergebnis stimmt.

Das Papyrus Moskau beginnt mit der Berechnung des Inhalts von zylindrischen und kubischen Getreidespreichern. Wahrscheinlich darauf aufbauend kamen sie zu dem Ergebnis $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16\ldots$. Dieser Wert entstand durch die Formel $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, was dem Inhalt einer Kreisfläche entspricht. Der Text lautete:

> Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9 ht. Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm $\frac{1}{9}$ von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.

Die Ägypter kamen wahrscheinlich so auf diesen recht genauen Wert: Die Seite s eines Quadrats, das denselben Flächeninhalt hat wie der Kreis mit Durchmesser d, erhält man, indem man von d einen Bruchteil wegnimmt. Da nur Stammbrüche bekannt waren, erhielt man:

$$s = d - \frac{1}{n}d$$

Mit $n = 9$ folgt die Behauptung. Aber warum wählten sie 9, den besten Wert und nicht 8 oder 10? Es lässt sich vermuten, dass der Inhalt eines zylindrischen Getreidespeichers in einen kubischen umgefüllt wurde und die Höhe verglichen wurden. Dies ist eine Aufgabe, die im Papyrus Moskau behandelt wird.

Die Ägypter benutzten aber auch Quadtratnetze für Entwürfe und Konstruktionszeichnungen. Nähert man wie in Problem 48 ein Quadrat durch ein approximierendes Achteck an, so ist dessen Fläche

$$d^2\left(1 - \frac{2}{9}\right) \approx d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$$

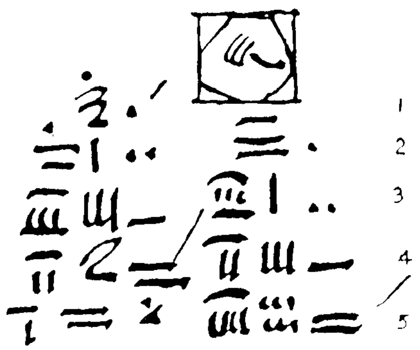

Abb. 14: Problem 48 aus dem Papyrus Rhind.

Unregelmäßige Flächen zerlegten die Ägypter in rechtwinklige Dreiecke und rechtwinklige Trapeze, die sie nach der Formel

$$\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}$$

berechneten. Für Dreiecke wurde $d = 0$ angenommen. Rechte Winkel wurden über das pythagoräische Tripel $3, 4, 5$ konstruiert.

In der Aufgabe 14 des Papyrus Moskau wird das Volumen eines quadratischen Kegelstumpfes nach folgender Formel berechnet:

$$V = (a^2 + b^2 + ab) \cdot \frac{h}{3}.$$

a ist die Länge der Grundseite, b die Länge der Deckflächenseite.

Diese Vorschrift ist korrekt, allerdings ist seine Entstehung unklar, da nicht überliefert ist, ob die Ägypter die Vorschrift zur Berechnung des Pyramidenvolumens kannten.

4 Leibniz

Leibniz war einer *der* Universalgelehrten. Neben der Mathematik beschäftigte er sich mit Problemen der Philosophie (Entwicklung der Leibnizschen Monadentheorie), der Mechanik, Naturwissenschaften, der Theologie und der Geschichtswissenschaft. Zudem war er in der Politik und Wissenschaftsorganisationen engagiert.

Der Gebrauch des Wortes „Funktion“ als mathematischer Fachausdruck geht auf Leibniz zurück. Hatte er anfangs von „relatio“ zwischen Ordinate und Abszisse gesprochen, so verwendete er „Funktion“ bereits 1692 und 1694. Im Briefwechsel mit Johann Bernoulli zwischen 1694 und 1698 wurden der Funktionsbegriff und die Termini „Konstante, Variable, Koordinate, Parameter, algebraische und transzendente Funktion“ festgelegt.

Als Naturforscher griff Leibniz 1686 und 1695 mit Publikationen in die Diskussionen um das wahre Maß der Kräfte ein. Trotz der Unklarheiten im Gebrauch des Wortes „Kraft“ hat Leibniz eine Vorform des Energieerhaltungssatzes (beim unelastischen Stoß) formuliert.

4.1 Mathematik und Metaphysik bei Leibniz

Leibniz Entdeckungen in der Mathmatik hängen eng mit seiner Metaphysik zusammen. Seine Logik geht davon aus, dass unsere Bewußtseinsinhalte und Wahrnehmungen, die er aufgrund des „principium identitatis indiscernibilium“ als Gedanken bestimmen kann, sich in mehrere einfache Elemente zerteilen lassen (Alphabet der Gedanken): Diese einfachen Elemente können durch Zahlen (Symbole) ausgedrückt werden. Mit Hilfe rein formaler Regeln lassen sich dann aus geeigneten Axiomen alle wahren Sätze ableiten und hieraus entwickelte er dann eine Art formal-deduktive Logik, die die Prinzipien der heutigen mathematischen Logik vorwegnimmmt.

Insgesamt ergeben sich somit drei Disziplinen: die methodisch betriebene Wissenserweiterung (ars vivendi), die geeignete Wahl von Charakteren (ars characteristica) und die Regeln mit diesen umzugehen (ars combinatoria).

Am bedeutensten ist für Leibniz die ars characteristica, da die Charaktere ja alles ausdrücken müssen, was in der bezeichneten Sache verborgen liegt:

> „Dies geschieht aber am besten durch Zahlen wegen ihrer Reichhaltigkeit und Eignung zum Rechnen.“

Das er Zahlen verwendet, hat hauptsächlich drei Gründen:

1. Sie ermöglichen in jeder Phase der Rechnung eine Kontrolle.
2. Sie können die verschiedenen Stellungen und Zugehörigkeiten zwischen den Größen und Charakteren ausdrücken.
3. Sie dienen dem mathematischen Fortschritt, da sie Bildungsgesetze und Harmonien erkennen lassen.

4.2 Infinitesimalkalkül

Der Infinitesimalkalkül wurde von Leibniz und Isaac Newton (1643–1727) gleichermaßen erfunden, wodurch es zu dem wohl heftigsten und berühmtesten Prioritätsstreit in der Geschichte der Mathematik kam. Soviel man heute weiß, hat Newton die Differential- und Integralrechnung als erster gefunden, Leibniz hat sie aber als erster publiziert.

Worin lag die eigentliche Leistung der beiden Männer? Bereits vor ihrer Zeit gab es eine Reihe von Verfahren, die Tangente an Kurven und den Flächeninhalt sowie das Volumen zu bestimmen. Aber alle diese Verfahren waren speziell auf ihre

Problem zugeschnitten, während es ein allgemeines Verfahren nicht gab. Ein allgemeines Verfahren wurde nun von Leibniz und Newton aus den schon bestehenden Verfahren hergeleitet. Hierbei entwickelte Newton seine Ideen aus einer kinematischen Vorstellung von Kurven, Flächen und Körpern; Leibniz hingegen wählte einen stärker infinitesimalen Zugang.

Für Leibniz sind die vier Pariser Jahre von 1672 bis 1676 die wichtigsten. Obwohl er nur die Elementarmathematik kennengelernt hatte, kamen ihm hier die grundlegenden Gedanken und Ideen, die er später weiterführte und veröffentlichte. Anregungen für sein Infinitesimalkalkül bezog er aus Schriften von Pascal (Idee des „charakteristischen Dreisecks") und von Gregorius a san Vincento. Im Oktober und November 1675 gelangen ihm dann die entscheidenden Formalisierungen:

An die Stelle der Gesamtheiten Cavalieris *omn(es)l* verwendet Leibniz das Integralzeichen als stilisiertes S für *summa* zunächst in der Form $\int l$ und später in der heutzutage üblichen Form $\int ydy$. Für die inverse Operation wird zunächst $\frac{x}{d}$, dann dx geschrieben. Leibniz bemerkte hierzu:

> „Wie nämlich das Zeichen $\int$ die Dimension vermehrt, so wird das Zeichen d sie vermindern; es bezeichnet aber $\int$ eine Summe, d eine Differenz."

Damit hat Leibniz den „Calculus differentialis" (Differtialrechnung) und den „Calculus summatorius" (Integralrechnung) geschaffen.

4.3 Begründung der Differentialrechnung

Zwei Fragestellungen standen zu der Zeit Leibniz' im Brennpunkt der mathematischen Bemühungen: das Quadratur- und das Tangentenproblem.

Beim ersten Problem ging es hauptsächlich darum, Flächeninhalte und Volumina von Rotationskörpern zu berechnen. Da dies meist durch Zerlegung der Flächen in Rechtecke und Quadrate versucht wurde, nennt man diese Probleme Quadraturprobleme.

Der zweite Problemkreis beschäftigte sich mit der Frage der Kurvenneigung bzw. -steigung.

Im folgenden soll auf die Begründung der Differentialrechnung kurz eingegangen werden: Sei eine glatte Kurve $AP = y(x)$ gemäß untenstehender Zeichnung gegeben. Die Steigung der Tangente in P soll bestimmt werden. Dazu wird eine feste Strecke dx vorgegeben, die in das Dreieck TBP in Richtung der x-Achse eingepaßt wird: $\overline{CD} = dx$. Das Differential dy der Funktion y wird dann folgendermaßen definiert (t ist die Länge der Subtangenten):

$$dy = \frac{y}{t}dx.$$

Der entscheidende Durchbruch gelingt Leibniz, indem er einerseits erkennt, dass es zum charakteristischen Dreieck PCD ähnliche Dreiecke bei allen (stetigen) Kurven und für alle Punkte der Kurve gibt. Andererseits erkennt er, dass die Form der Dreiecke von dem jeweiligen Kurvenpunkt abhängt und damit die Tangente bestimmt.

Formal läßt sich der Differentialquotient so ausdrücken:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

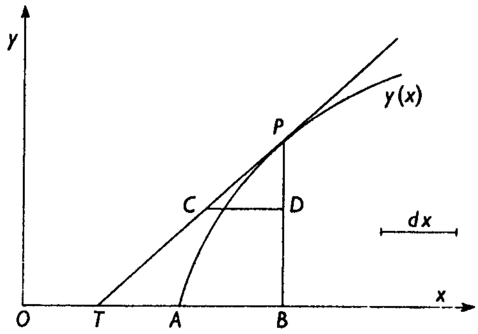

Abb. 15: Der Differentialquotient bei Leibniz.

Das Differentialkalkül ist deshalb so revolutionär, weil hier erstmals mit infinitesimal kleinen Größen ebenso gerechnet wird wie mit endlichen.

Fasst man nun alle durch das Differenzieren gewonnenen Kurvenelemente wieder zusammen, so rekonstruiert man die Kurve aus ihren Tangentenelementen. Entsprechend kann man die Ordinate y aus der Summe der Ordinatendifferenzen rekonstruieren: $y = \sum \triangle y$. Wird $\triangle x$ und $\triangle y$ beliebig klein, so wird aus der Summe das Integral:

$$y = \int dy.$$

Setzt man nun $\triangle y = \frac{\triangle y}{\triangle x} \triangle x$ ein und bildet den Grenzwert, so erhält man

$$y = \int \frac{dy}{dx} dy.$$

Differenzieren und Integrieren erweisen sich hiermit als inverse Operationen, da der Bruch gerade der oben definierte Differentialausdruck ist.

Wie kann das Integral nun gedeutet werden? Setzt man statt des Bruchs eine Funktion $z(x)$ ein, so erweist sich $\sum z(x) \triangle x$ als Summe von Rechtecken unter der Kurve $z(x)$. Beim Grenzübergang $\triangle x \to 0$ erhält man dann die Fläche unter der Kurve, womit das Quadraturproblem grundsätzlich gelöst ist.

Auf dem Gebiet der Analysis gelingt Leibniz noch die Lösung folgender Probleme:

- Kettenlinie (1691): Tangente, Quadratur, Rektifikation, Schwerpunkt, Kubator und Komplanation des Drehkörpers.
- Unendliche Reihe (1673): „Leibnizreihe“ für π:
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$
- Ermittlung des bestimmten Integrals, wenn eine Stammfunktion bekannt ist (1693).
- Probleme der Enveloppe einer Kurvenschar (1692, 1694).
- Integration einiger gewöhnlicher Differentialgleichungen im Anschluss an geometrische Probleme (1694).
- Bestimmung höherer Differentiale, insbesondere des n-ten Differentials einer Produktfunktion (1695).

- Überführung einer Differentialgleichung in eine Integralgleichung (1702).
- Vollständige Durchführung der Integration rationaler Funtionen durch Partialbruchzerlegung (1702/03).

Im 18. Jahrhundert wurde der Calculus rasch weiter ausgebaut, wobei es hauptsächlich die Anhänger von Leibniz waren, die für eine Verfeinerung und Weiterentwicklung sorgten. Hier vor allem die Familie Bernoulli und Leonard Euler. Am Anfang des 18. Jahrhunderts wurde die Entwicklung dann durch Lagrange, Legendre und Laplace in der Physik (Mechanik, Astronomie) vorangetrieben. Erst später bemühten sich d´Alembert und Lagrange die Erfolge auf ein logisches und exaktes Fundament zu stellen. Dies gelang jedoch erst im 19. Jahrhundert Cauchy und Weierstraß, die eine Arithmetisierung der Analysis durchführten und so die Prinzipien der Analysis auf die Begriffswelt der reellen Zahlen zurückführten.

4.4 Dyadik

Nach zweimonatiger Arbeit konnnte Leibniz im Jahre 1700 seinen ersten Teil der Arbeit über die Dyadik vorlegen. Mit seinem binären Zahlensystem wollte er keineswegs das Rechnen mit den gewöhnlichen Zahlen außer Kraft setzen. Vielmehr zielte er auf die Vervollkommnung der Zahlentheorie in einer Weise, dass sie

> „sowohl der Natur der Zahlen selbst und vieler trefflicher auch nützlicher Eigenschaften so darin verborgen; als auch des wunderbaren Vorbilds der Schöpfung, so sich darin ergibt,“

dient. Leibniz sieht seine Dyadik als eine Metatheorie, die vor allem der Vervollkommnung der Denkkunst dient.

Leibniz hoffte durch die Dyadik allgemeine Gleichungsprobleme und besonders die diophantischen Gleichungen besser beherrschen zu können. Ebenso erwartete er sich Ergebnisse im Bezug auf Primzahlen und die Approximation von transzendenten Zahlen im binären System. Allerdings verlief nur seine Arbeit über die Approximation von Zahlen erfolgreich. Zwar hat er nie sein Ziel erreicht, π durch eine unendliche Reihe mit ganzzahligen Gliedern zu anzunähern; er machte jedoch eine ganze Reihe anderer interessanter Entdeckungen. Zu diesen zählt zum Beispiel der Zusammenhang zwischen der Dyadik und dem I Ging.

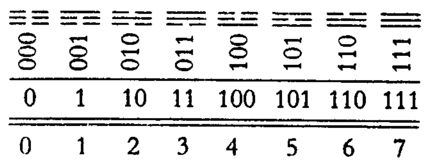

Abb. 16: Vergleich Dyadik und I Ging.

Neben diesen Beziehungen meinte Leibniz auch eine Analogie zwischen Dyadik und christlichem Glauben zu sehen, die teilweise aber in eine sehr bizarre Zahlenmystik ausartet, wie man in einem Brief an den französischen Jesuitenpater Bouvet lesen kann:

> „Zu Beginn des ersten Tages war die 1, das heißt Gott. Zu Beginn des zweiten Tages die 2, denn Himmel und Erde wurden während des ersten geschaffen. Schließlich zu Beginn des siebenten Tages war schon alles da; deshalb ist der letzte Tag der vollkommenste und der Sabbat, denn an ihm ist alles geschaffen und erfüllt, und deshalb schreibt sich die 7 (im

> dualen System) 111, also ohne Null. Und nur wenn man die Zahlen bloß mit 0 und 1 schreibt, erkennt man die Vollkommenheit des siebenten Tages, der als heilig gilt, und von dem noch bemerkenswert ist, daß seine Charaktere (in der Schreibweise 111) einen Bezug zur Dreifaltigkeit haben.“

Auf Grundlage der Dyadik entwickelte Leibniz auch die erste mechanische Rechenmaschine mit Staffelwalze (1672), deren Konstruktionsprinzip den Weg zu modernen mechanischen Rechnern eröffnete, da sie eine echte Vierspeziesmaschine war (vgl. Abbildung).

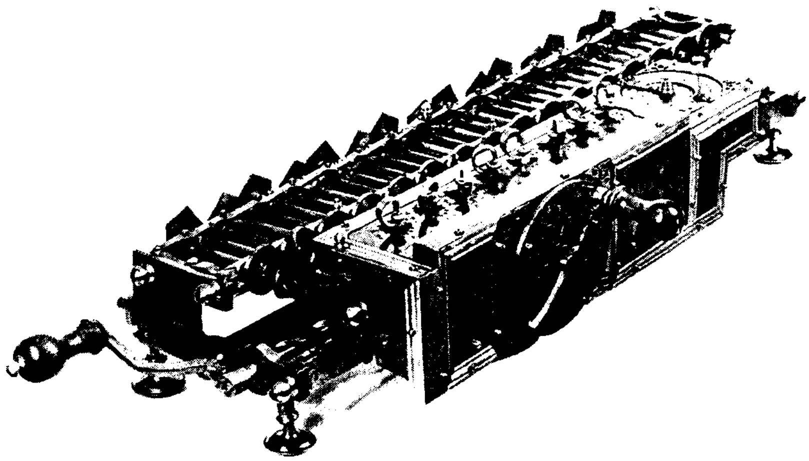

Abb. 17: Leibniz' Vierspeziesrechenmaschine (80 cm × 30 cm × 15 cm).

5 Vermittlung von Geschichte im Unterricht

Die Geschichte der Mathematik kann durch unterschiedliche Unterrichtskonzepte in den Mathematikunterricht eingebaut werden: Frontalunterricht, Projektarbeit, Gruppenarbeit und der Computereinsatz. Diese verschiedenen Möglichkeiten lassen sich dabei nicht gänzlich von einander separieren, sondern können sich überschneiden. Anhand der ausgewählter Beispiele sollen die Konzepte verdeutlicht werden.

5.1 Entstehung unseres Zahlensystems

Die im zweiten Kapitel dargestellte Entwicklung des Zahlensystems bietet sich für einen Projektunterricht oder eine Arbeitsgemeinschaft an. Zusammen mit dem Kunstlehrer können Tontäfelchen mit Aufgaben aus dem Mathematikschulbuch gebrannt werden. Das Schreiben von Hieroglyphen auf selbstgemachten Papyrus oder das Knoten von Zahlen in der peruanischen Knotenschrift kann das Verständnis für die Leistung der damaligen Völker erhöhen.

Durch das praktische Anwenden wird das im Unterricht zunächst theoretisch erlernte Wissen angewendet und gefestigt. Das Vernetzen von Wissensinhalten aus dem Geschichts- und Kunstunterricht ist ein weiterer Vorteil. Wird eine Ausstellung in der Schule organisiert und erscheint eventuell sogar ein Artikel in der Lokalzeitung ist dies die beste Belohnung für die Arbeit der Schüler und kann sie für den weiteren Unterricht motivieren. Eine Veröffentlichung auf der Homepage der Schule kann eine weitere Motivation sein.

5.2 Berechnung der Zahl π

Die Berechnung der Zahl ist ein Problem, das bis in die Frühgeschichte der Mathematik zurückreicht. Mindestens genauso vielfältig und abwechslungsreich ist die Berechnung dieser Zahl: Monte-Carlo-Methode, Gitterpunktverfahren, geometrische Approximationen oder algebraische Gleichungen sind nur einige Verfahren.

Wird in der zehnten Jahrgangsstufe auch Informatik unterrichtet, so liegt eine Unterrichtform bereits auf der Hand. In Gruppen implementieren die Schüler einige Algorithmen und vergleichen die Ergebnisse (einige Algorithmen konvergieren schneller als andere).

Aber auch ohne Computer lassen sich die einzelnen Verfahren vergleichen. Während einige Schüler Algorithmen von Hand berechnen (Vielecke), können andere sich mit geometrischen Annäherungen (Gitterpunktverfahren, Monte-Carlo-Methoden) auseinandersetzen. Diese Unterrichtsform bietet sich an, da maximal zwei Stunden benötigt werden, um die verschiedenen Methoden zu besprechen und zu vergleichen. Auch wird den Schülern dadurch die Leistung der Mathematiker vor Augen geführt (Archimedes: Annäherung durch ein 96-Eck von innen und außen), da sie „am eigenen Leib" verspüren, wie anstrengend eine gute Annäherung ist.

Da die Zahl π so sehr früh in der Geschichte auftaucht, kann bereits in der neunten Klasse auf diese Zahl kurz eingegangen werden. Dass die Ägypter alle ihre mathematischen Betrachtungen aus praktischen Motiven heraus entwickelten, lässt sich im Unterricht gut nutzen. So kann die Berechnung von runden Getreidesilos nach der Besprechung des Volumens einer Pyramide betrachtet werden, da sich hier Ähnlichkeiten ergeben.

5.3 Differentialrechnung

Die Entstehung der Differentialrechnung durch Leibniz und Newton lässt sich nur schwer in den Unterricht einbauen. Die mathematischen Voraussetzungen liegen in der elften Jahrgangsstufe noch nicht vor und die Entwicklung der Differentialrechnung lässt sich nur schlecht an praktischen Beispielen aus dem damaligen Alltag motivieren. Der Stoff würde für die Schüler nicht verständlicher oder eingängiger werden.

Dennoch kann näher auf den Prioritätsstreit eingegangen werden. Zusammen mit dem Geschichtslehrer kann fachübergreifend gearbeitet werden, um so die unterschiedlichen Lebensumstände von Newton und Leibniz herauszuarbeiten. Gerade Leibniz bietet durch seinen bewegten Lebenslauf eine Vielzahl an Möglichkeiten (Geschichte, Politik, Bildungssystem). Das mathematische Verständnis für die Differtialrechnung wird aber nicht gefördert. Ein einstündiger Vortrag durch den Lehrer oder einen Schüler ist daher ausreichend. Abschließend kann die wohl einzig interessante Frage der Schüler: „Ist das der mit den Keksen?", beantwortet werden (siehe Abbildung 18).

Bahlsen-Werbung, um 1900

Abb. 18: Werbeplakat für Leibniz-Kekse.

Literatur

[Barrow] Barrow, J. D.: *Pi in the sky.* Counting, thinking and being. Oxford: University Press, 1992; Penguin Books, 1993.

[Becker] Becker, O. und Hofmann, Jos. E.: *Geschichte der Mathematik.* Bonn: Athenäum Verlag 1951.

[Brockhaus] *Brockhaus Enzyklopädie.* Mannheim: F. A. Brockhaus 1988. 18. Auflage.

[Finster] Finster, R. und van den Heuvel, G.: *Gottfried Wilhelm Leibniz.* Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag 1990.

[Gericke] Gericke, H.: *Mathematik in Antike und Orient.* Wiesbaden: Fourier Verlag, 1993. 2. Auflage.

[Gericke] Gericke, H.: *Mathematik im Abendland.* Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Wiesbaden: Fourier Verlag, 1993. 2. Auflage.

[Gottwald] Gottwald, S. (Hrsg.): *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Leipzig: Bibliographisches Institut 1990.

[Hecht] Hecht, H.: *Gottfried Wilhelm Leibniz.* Mathematik und Naturwissenschaften im Paradigma der Metaphysik. Stuttgart, Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1992.

[Kaiser] Kaiser, H. und Nöbauer, W.: *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht.* Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

[Knobloch] Knobloch, E.: *Gottfried Wilhelm Leibniz.* Das Wirken des großen Philosophen und Universalgelehrten als Mathematiker, Physiker, Techniker. Vorträge und Katalog der Erstausstellung an der Universität Hannover anläßlich der Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) vom 9. bis 12. April 1990. Universität Hannover. 32–40.

[Kropp] Kropp, G.: *Geschichte der Mathematik.* Probleme und Gestalten. Heidelberg: Quelle & Mayer, 1969.

[Neuser] Neuser, W. u. a.: *Newtons Universum.* Materialien zur Geschichte des Kraftbegriffs. Hamburg: Spektrum der Wissenschaften Verlagsgesellschaft 1990.

[Prause] Prause, G.: *Genies in der Schule.* Legenden und Wahrheit über den Erfolg im Leben. München: Deutscher Taschenbuch Verlag 1991.

[Schulmathematik] *Lexikon der Schulmathematik.* Augsburg: Weltbild Verlag 1994. Band 3.

[Struik] Struik, D. J.: *Abriss der Geschichte der Mathematik.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976. 6. Auflage.