

Aufgabe

$$\begin{aligned}5x + 3y + 7z &= 1 \\3x - 6y - 8z &= 6 \\4x + 5y - 3z &= 37\end{aligned}$$

Lösung

Die Gleichungen werden so umgeformt und untereinander geschrieben, dass alle gleichen Variablen auf der linken Seite der Gleichung untereinander stehen und die konstanten Zahlen auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned}5 \cdot x + 3 \cdot y + 7 \cdot z &= 1 \\3 \cdot x - 6 \cdot y - 8 \cdot z &= 6 \\4 \cdot x + 5 \cdot y - 3 \cdot z &= 37\end{aligned}$$

Durch Division der 1. Gleichung durch 5 wird der Faktor vor x eliminiert:

$$\begin{aligned}x + \frac{3}{5} \cdot y + \frac{7}{5} \cdot z &= \frac{1}{5} \\3 \cdot x - 6 \cdot y - 8 \cdot z &= 6 \\4 \cdot x + 5 \cdot y - 3 \cdot z &= 37\end{aligned}$$

Mit der 1. Gleichung wird nun in allen anderen Gleichung der Summand mit x eliminiert.

Zur 2. Gleichung wird das -3fache der 1. Gleichung addiert:

$$\begin{aligned}x + \frac{3}{5} \cdot y + \frac{7}{5} \cdot z &= \frac{1}{5} \\- \frac{39}{5} \cdot y - \frac{61}{5} \cdot z &= -\frac{27}{5} \\4 \cdot x + 5 \cdot y - 3 \cdot z &= 37\end{aligned}$$

Zur 3. Gleichung wird das -4fache der 1. Gleichung addiert:

$$\begin{aligned}x + \frac{3}{5} \cdot y + \frac{7}{5} \cdot z &= \frac{1}{5} \\- \frac{39}{5} \cdot y - \frac{61}{5} \cdot z &= -\frac{27}{5} \\-\frac{13}{5} \cdot y - \frac{43}{5} \cdot z &= \frac{181}{5}\end{aligned}$$

Durch Multiplikation der 2. Gleichung mit -5/39 wird der Faktor vor y eliminiert:

$$\begin{aligned}x + \frac{3}{5} \cdot y + \frac{7}{5} \cdot z &= \frac{1}{5} \\y + \frac{61}{39} \cdot z &= -\frac{9}{13} \\-\frac{13}{5} \cdot y - \frac{43}{5} \cdot z &= \frac{181}{5}\end{aligned}$$

Mit der 2. Gleichung wird in allen anderen Gleichung der Summand mit y eliminiert.

Zur 1. Gleichung wird das $-3/5$ fache der 2. Gleichung addiert:

$$\begin{array}{rcl} x & + \frac{6}{13} \cdot z & = \frac{8}{13} \\ & y + \frac{61}{39} \cdot z & = -\frac{9}{13} \\ \frac{13}{5} \cdot y & - \frac{43}{5} \cdot z & = \frac{181}{5} \end{array}$$

Zur 3. Gleichung wird das $-13/5$ fache der 2. Gleichung addiert:

$$\begin{array}{rcl} x & + \frac{6}{13} \cdot z & = \frac{8}{13} \\ & y + \frac{61}{39} \cdot z & = -\frac{9}{13} \\ & - \frac{38}{3} \cdot z & = 38 \end{array}$$

Durch Multiplikation der 3. Gleichung mit $-3/38$ wird der Faktor vor z eliminiert:

$$\begin{array}{rcl} x & + \frac{6}{13} \cdot z & = \frac{8}{13} \\ & y + \frac{61}{39} \cdot z & = -\frac{9}{13} \\ & z & = -3 \end{array}$$

Mit der 3. Gleichung wird in allen anderen Gleichung der Summand mit z eliminiert.

Zur 1. Gleichung wird das $-6/13$ fache der 3. Gleichung addiert:

$$\begin{array}{rcl} x & & = 2 \\ & y + \frac{61}{39} \cdot z & = -\frac{9}{13} \\ & z & = -3 \end{array}$$

Zur 2. Gleichung wird das $-61/39$ fache der 3. Gleichung addiert:

$$\begin{array}{rcl} x & & = 2 \\ & y & = 4 \\ & z & = -3 \end{array}$$