Definition

Eine Funktion der Form

$\mathbf{f : x \rightarrow a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$, mit a,b,c $\in$ **R, a** $\neq$**0**

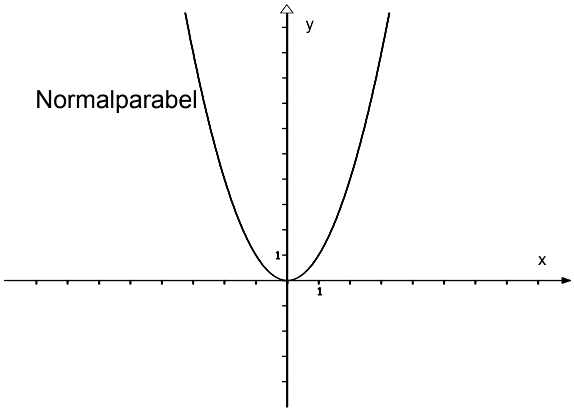
heißt **quadratische Funktion**, der zugehörige Graph heißt **Parabel.**

a) Die **Normalparabel**

$\mathbf{f : x \rightarrow x^2}$

Grundform und Grundeigenschaften aller Graphen von quadratischen Funktionen kann man am Graph dieser 'einfachsten' quadratischen Funktion, der Normalparabel erkennen: Der Graph

- ist **krummlinig**
  [hier: *steil fallend→flach fallend→ flach steigend→stark steigend*]
- hat genau einen **Scheitelpunkt**
  [hier:*der Punkt (0/0) ist tiefster Punkt*]
- ist **symmetrisch** zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt
  [hier: *symmetrisch zur y-Achse*]



---

b) Stauchung, **Spiegelung** an der x-Achse und **Streckung**

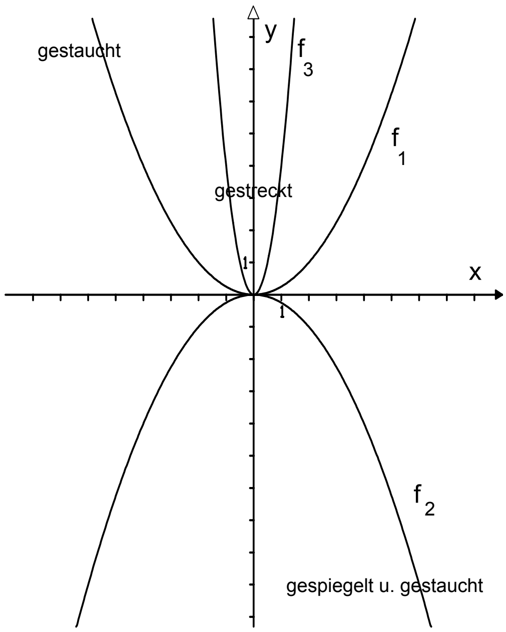
$\mathbf{f_1 : x \rightarrow + \frac{1}{4} \cdot x^2}$

$\mathbf{f_2 : x \rightarrow - \frac{1}{4} \cdot x^2}$

$\mathbf{f_3 : x \rightarrow + 4 \cdot x^2}$

Je nach Wahl des Faktors vor dem x^2 wird der Graph der Normalparabel folgendermaßen verändert:

- **-1<Faktor<1:** Der Graph ist **gestaucht**, d. h.: Der Graph ist 'flacher' und 'breiter' als der Graph der Normalparabel. Beispiele hier: $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$.
- **Faktor<0**: Spiegelung an der x-Achse. Z.B.: Der Graph von f_2 ist der an der x-Achse gespiegelte Graph von f_1.
- **Faktor<-1** oder **Faktor>1:** Der Graph ist **gestreckt**, d.h.er ist 'steiler' und 'schmaler' als der Graph der Normalparabel. Beispiel hier: $\mathbf{f_3}$.



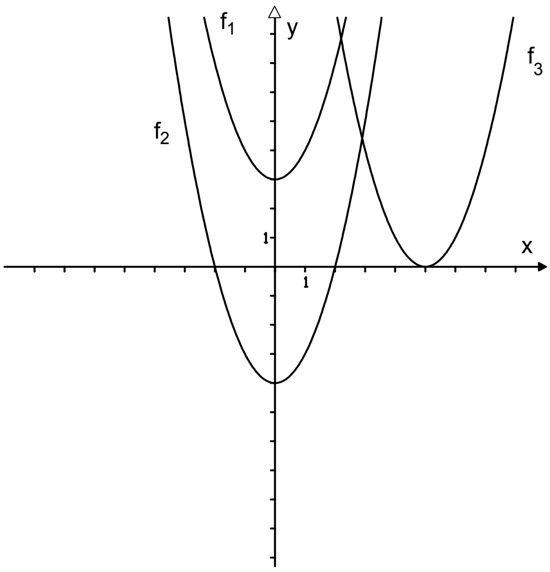
c) Verschiebungen in y- Richtung und **in x- Richtung:**

$f_1: x \rightarrow x^2 + 3$; $f_2: x \rightarrow x^2 - 4$ **$f_3: x \rightarrow (x-5)^2$** [$=x^2 - 10x + 25$];

- Wird nach dem Quadrieren von x eine Zahl addiert [oder subtrahiert], so wird der Graph der Normalparabel um den Wert dieser Zahl nach oben [unten] verschoben, denn alle Quadrate werden um den Wert dieser Zahl größer [kleiner].

- Wird vor dem Quadrieren eine Zahl zum x-Wert addiert [oder subtrahiert], so wird der Graph der Normalparabel um den Wert dieser Zahl nach links [rechts] verschoben, denn die Quadratwerte $(..)^2$ entstehen nicht direkt aus dem eingesetzten x-Wert, sondern aus dem um die Zahl 'verschobenen' x-Wert.

  Die Verschiebung in x-Richtung erkennt man nicht direkt aus der [rechten] ausmultiplizierten Form des Terms .



In a) bis c) sind die grundsätzlich möglichen Veränderungen der Normalparabel einzeln beschrieben. Alle Veränderungen sind beliebig kombinierbar. Dabei bleibt stets das typische, nur leicht veränderte Bild der Normalparabel wie es unter a) beschrieben ist, erhalten.

Welche Informationen über den Verlauf des Graphen einer quadratischen Funktion können direkt aus dem Funktionsterm abgelesen werden?

1) Die **Scheitelpunktform** $f(x) = \mathbf{a \cdot (x + s)^2 + t}$; **$a, s, t \in R$ $a \neq 0$**

Liegt der Funktionsterm in Scheitelpunktform vor, so kann man **direkt** ablesen:

1. die **Verschiebung** der Normalparabel in x- Richtung um -s und in y- Richtung um +t. damit ergeben sich die Koordinaten des **Scheitelpunkt**es S: **S(-s,t)**
2. **Stauchung, Streckung** und **Spiegelung** an der x-Achse (je nach Wert des Faktors a)
3. die **Art des Scheitelpunktes** (a>0: Hochpunkt, a< 0: Tiefpunkt)

indirekt ergibt sich daraus

4. die **Anzahl** und **Art der Nullstelle**n (x-Wert(e) mit dem y-Wert 0):
   - **eine** Nullstelle, wenn der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt, der Graph schneidet die x-Achse nicht, sondern die x-Achse wird berührt,
   - **zwei** Nullstellen, wenn der SP oberhalb [unterhalb] der x-Achse liegt und ein HP [TP] ist, der Graph schneidet die x-Achse zweimal.
   - **keine** Nullstelle sonst,

Beispiele:

1) $f(x) = -\mathbf{2 \cdot (x - 3)^2 + 4}$ S(**3/4**) ist **HP**, Graph ist **gestreckt**, es gibt **2 Nst.**.

2) $f(x) = +\mathbf{\frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2}$ S(**-2/4**) ist **TP**, Graph ist **gestaucht**, es gibt **1 Nst.**.

3) $f(x) = -\mathbf{x^2 - 5}$ S(**0/-5**) ist **HP**, Graph ist **wie NP**, es gibt **keine Nst.**

2) Die **Polynomform** $f(x) = \mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

Liegt der Funktionsterm in Polynomform vor, so kann man **direkt** ablesen:

1. **Stauchung, Streckung** und **Spiegelung** an der x-Achse (je nach Wert des Faktors a)
2. die **Art des Scheitelpunktes** (a>0: Hochpunkt, a< 0: Tiefpunkt)
3. den **y-Achsenabschnitt** (y-Wert zum x-Wert 0) : Bei y=c wird die y-Achse geschnitten.

Da jede Polynomform mit der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform umgewandelt werden kann, kann man **indirek**t auch erschließen:

4. den **x-Wert des Scheitelpunktes**: $-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{2 \cdot a}}$

Beispiele:	**1)** $f(x) = -\mathbf{2x^2 + 12x - 14}$	**gespiegelt** und **gestreckt**, S ist **HP**. y-A : -14 SP an der Stelle x =+3
	2) $f(x) = \mathbf{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2}$	**gestaucht**, S ist **TP** , y-Achsenabschnitt: +2, Sp an der Stelle x =- 2.

Nullstellen von quadratischen Funktionen:

Von besonderem Interesse sind stets die **Nullstellen** von Funktionen. Aus der Polynomform läßt sich nur sehr schwer oder nur in besonders einfachen Fällen etwas über die Anzahl und die Art der Nullstellen direkt ablesen. auch aus der Scheitelpunktform lassen sich die Nullstellen nicht direkt ablesen. **Die Nullstellen müssen berechnet werden**. (s. dazu besonderes Blatt (p-q-Formel)

Allgemein kann hier über Nullstellen von quadratischen Funktionen aber festgehalten werden:

Satz:

Quadratische Funktionen haben

entweder	**keine** Nullstelle	
oder	**eine** Nullstelle:	das ist der x-Wert des Scheitelpunktes, das bedeutet: der **Graph berührt** die x-Achse in der Nullstelle/im SP
oder	**zwei** Nullstellen:	das bedeutet: der Graph **schneidet** die x-Achse **zweimal** , die Nst liegen symmetrisch zum x-Wert des Scheitelpktes.

Übungen:

1) a) Ergänzen Sie die Wertetabelle.
Rechnen Sie dabei möglichst günstig, indem Sie auf vorher berechnete Werte zurückgreifen.

b) Machen Sie sich an diesen Beispielen noch einmal die Streckung, Stauchung, Spiegelung und Verschiebung bei quadratischen Funktionen klar.

c) Zeichnen Sie die Graphen

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
α) x^2										
β) $2x^2$										
γ) $-\frac{1}{2}x^2$										
δ) $x^2 + 3$										
ε) $2x^2 + 3$										
ζ) $(x - 1)^2$										
η) $(x - 1)^2 + 3$										
ϑ) $-(x - 1)^2 + 3$										

2) Welche Informationen über den Verlauf der Parabel lassen sich ohne Rechnung direkt aus dem gegebenen Funktionsterm ablesen?
(Art und Lage des Scheitelpunktes, Anzahl und Art der Nullstellen, y-Achsenabschnitt, ...)

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = -4x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5$

d) $f(x) = -2(x - 1)^2$ e) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$ f) $f(x) = 5(x + 2)^2 - 3$

g) $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$ h) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ i) $f(x) = -6x^2 + 12x + 12$
